解答例

STEP II 1991、第 12 問

力学 ・ 弾性体の強制振動

> **STEP II 1991、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q12

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.1 節「共鳴」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/resonance.html

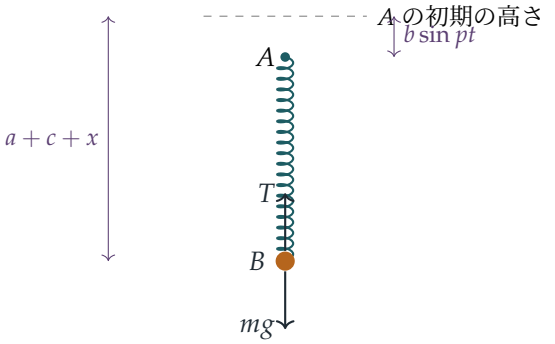
鍵となる考え方

張力（tension）は伸び（extension）だけで決まる。伸びとは、質点の位置から動く端の位置を引き、さらに自然長（natural length）を引いたものである。これを x と $b\sin pt$ を用いて書き表し、最初のつり合いを使って弾性率（modulus）を c を含む式で置き換えれば、運動方程式（equation of motion）は自然に得られる。その結果として現れるのは強制単振動（forced simple harmonic oscillator）である。これは余関数（complementary function）に特殊解（particular solution）を加えて解く。また、「ぴんと張っている」（taut）とは「伸びが決して負にならない」という意味であることを忘れてはならない。

解答

運動方程式

質点を、フックの法則（Hooke's law）に従う弾性率 λ の軽い弾性ひもにつけられた質量 m の点としてモデル化する。位置はすべて、A の初期位置から下向きに測る。



最初のつり合いの状態では、伸びは c であり、張力が重力とつり合っている：

$$\frac{\lambda c}{a} = mg, \qquad \text{よって} \qquad \frac{\lambda}{ma} = \frac{g}{c} = n^2.$$

時刻 t において、質点の深さは $a + c + x$、端 A の深さは $b \sin pt$ である。ひもが張っている間、その長さは $a + c + x - b \sin pt$ であるから、伸びは

$$e = c + x - b \sin pt,$$

であり、張力は $T = \lambda e / a$ である。質点について下向きの成分を考えると、

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} &= mg - \frac{\lambda}{a}(c + x - b \sin pt) \\ &= mg - \frac{\lambda c}{a} - \frac{\lambda}{a}(x - b \sin pt) \\ &= -\frac{\lambda}{a}(x - b \sin pt), \end{aligned}$$

となる。ここで $\lambda c / a = mg$ を用いた。両辺を m で割り、$\lambda / (ma) = n^2$ を用いると、

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -n^2(x - b \sin pt),$$

となり、求める式が得られる。これには $e \geq 0$ が必要である。ひもがたるむと、張力は $\lambda e / a$ ではなく 0 になるからである。

$x(t)$ を求める

方程式を $\ddot{x} + n^2 x = n^2 b \sin pt$ と書き直す。余関数は $C \cos nt + D \sin nt$ である。特殊解として $x = K \sin pt$ を試すと、

$$-p^2 K + n^2 K = n^2 b \quad \Longrightarrow \quad K = \frac{n^2 b}{n^2 - p^2},$$

となる。$p < n$ より $n^2 - p^2 \neq 0$ であるから、これは妥当である。したがって

$$x = \frac{n^2 b}{n^2 - p^2} \sin pt + C \cos nt + D \sin nt.$$

$t = 0$ において質点はつり合いの位置で静止しているから、$x(0) = 0$ かつ $\dot{x}(0) = 0$ である。前者から $C = 0$ が得られる。後者から

$$\frac{n^2bp}{n^2 - p^2} + nD = 0 \quad \Longrightarrow \quad D = -\frac{nbp}{n^2 - p^2}.$$

が得られる。ゆえに

$$x(t) = \frac{bn}{n^2 - p^2}(n \sin pt - p \sin nt),$$

となり、求める式が得られる。

ひもが張ったままである条件

考えてみよう 正（または 0 以上）であり続けなければならないのは、正確には何か。x か、張力か、それとも別のものか。

それは伸び $e = c + x - b \sin pt$ である。$x(t)$ の式が運動を表すのは $e \geq 0$ である間だけであるから、ひもが常に張ったままであるための条件は、これがすべての $t \geq 0$ で成り立つことにほかならない。x を代入すると、

$$\begin{aligned} x - b \sin pt &= b \sin pt \left(\frac{n^2}{n^2 - p^2} - 1 \right) - \frac{bnp}{n^2 - p^2} \sin nt \\ &= \frac{bp}{n^2 - p^2}(p \sin pt - n \sin nt). \end{aligned}$$

よって必要十分条件は

$$c + \frac{bp}{n^2 - p^2}(p \sin pt - n \sin nt) \geq 0 \quad \text{すべての} t \geq 0,$$

であり、$n^2 - p^2 > 0$ であるから、同値な形として

$$bp(n \sin nt - p \sin pt) \leq c(n^2 - p^2) \quad \text{すべての} t \geq 0.$$

と書ける。（e が孤立した瞬間にだけ 0 に達する場合、張力は一瞬 0 になるが、運動方程式は依然として成り立ち、ひもが実際にたるむことはない。不等式が等号を含むのはこのためである。）

ここで $pb < (n - p)c$ と仮定する。任意の t について、$\sin nt \leq 1$、$-\sin pt \leq 1$ かつ $n, p > 0$ であるから、

$$n \sin nt - p \sin pt \leq n + p.$$

$b > 0$（振幅）とすると $bp > 0$ であるから、

$$bp(n \sin nt - p \sin pt) \leq bp(n + p) < (n - p)c(n + p) = c(n^2 - p^2).$$

条件は成り立ち、実際には狭義の不等式で成り立つ。よってひもは常に張ったままである。（b が負であってもよいとする場合は、$|n \sin nt - p \sin pt| \leq n + p$ であるから、b の代わりに $|b|$ を用いて同じ議論が成り立つ。）

検算

- $t = 0$ のとき：$x(0) = 0$ かつ $\dot{x}(0) = \frac{bn}{n^2 - p^2}(np - pn) = 0$ であり、そうなるべきとおりである。
- $p \to 0$ のとき、端 A はほとんど動かず、$x(t) \approx \frac{bn}{n^2}(npt - pnt) \to 0$ となる。予想どおり何も起こらない。
- 伸びの最小値は $c - bp(n+p)/(n^2 - p^2) = c - bp/(n-p)$ を下回らない。これが正であるのは、ちょうど $pb < (n-p)c$ のときである。
- 数値的には、m, λ, a, c, b, p を無作為に選び、フックの法則に基づく完全な方程式を逐次（RK4）積分したところ、$x(t)$ の式と 4×10^{-10} 以内で一致した。$n = 1$、$p = 1/\sqrt{2}$、$c = 1$ とし、b を $(n-p)c/p$ よりわずか 5% 大きくとると、$t = 20\,000$ までに伸びは実際に負（約 -0.05）になる。

よくある間違い

- x そのものを伸びとしてしまう。上端が動くので、伸びは $c + x - b\sin pt$ である。
- $\dot{x}(0) = 0$ から解に $\sin nt$ の項が必要になることを忘れる。この項がなければ、質点は速度 $n^2 bp/(n^2 - p^2)$ で動き始めることになる。
- ひもが張っている条件を $x \geq -c$ と書いてしまう。これが正しいのは A が固定されている場合だけである。

STEP のその先へ

これは減衰のない強制振動である。応答は駆動振動数 p と固有振動数（natural frequency）n が混ざったものであり、因子 $1/(n^2 - p^2)$ は $p \to n$ のとき発散する。これが共振（resonance）である。n/p が無理数のとき、(nt, pt) を 2π を法として見た値は稠密に分布するので、$n\sin nt - p\sin pt$ はいくらでも $n + p$ に近くなる。したがって十分条件 $pb < (n-p)c$ は、本質的には必要条件でもある（ただし等号は依然として許される）。強制振動、共振、減衰（damping）については Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）で詳しく扱われており、微分方程式の側面については Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）で扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。