解答例

STEP II 1991、第 11 問

力学 ・ 発射点からの放物体の距離

> **STEP II 1991、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q11

鍵となる考え方

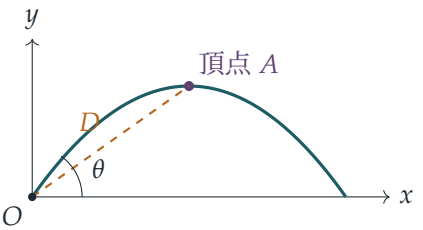
砲からの距離の 2 乗を扱う。こうすれば平方根を避けられ、どちらの小問も多項式の問題になる。前半では、頂点（apex）までの距離の 2 乗が $\sin^2\theta$ の 2 次式になるので、平方完成（completing the square）するか微分すれば最適な角度が求まる。後半では、砲弾が近づいてくるのは距離の 2 乗が減少しているときにちょうど限られるので、飛行全体にわたってその時間導関数（time derivative）の符号を調べる。

解答

モデル

砲弾を、空気抵抗（air resistance）のない状態で重力のみを受けて自由に運動する質点（particle）とみなす。砲弾は原点 O（砲手が立っている位置）から、速さ u、仰角（elevation）θ で発射される。ただし $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。x を水平方向、y を鉛直上向きにとる。時刻 t において

$$x = ut\cos\theta, \qquad y = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$



仰角

頂点に達するのは $\dot{y} = u\sin\theta - gt = 0$ のとき、すなわち $t = u\sin\theta/g$ のときである。このとき

$$x_A = \frac{u^2\sin\theta\cos\theta}{g}, \qquad y_A = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}.$$

距離 OA を D とおき、$s = \sin^2\theta$ とおくと $\cos^2\theta = 1 - s$ である。すると

$$\begin{aligned} D^2 = x_A^2 + y_A^2 &= \frac{u^4}{g^2}\left(\sin^2\theta\cos^2\theta + \tfrac{1}{4}\sin^4\theta\right) \\ &= \frac{u^4}{g^2}\left(s(1-s) + \tfrac{1}{4}s^2\right) = \frac{u^4}{g^2}\left(s - \tfrac{3}{4}s^2\right). \end{aligned}$$

被害は距離とともに小さくなるので、砲手は D をできるだけ大きくしたい。これは D^2 をできるだけ大きくすることと同じである。平方完成すると

$$s - \tfrac{3}{4}s^2 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{4}\left(s - \tfrac{2}{3}\right)^2,$$

となり、これが最大値 $\frac{1}{3}$ をとるのは $s = \frac{2}{3}$ のときであり、そのときに限る。$s = \sin^2\theta$ は $(0,1)$ のすべての値をとるので、この値は実現可能である。よって $\sin^2\theta = \frac{2}{3}$、$\cos^2\theta = \frac{1}{3}$ であり、

$$\boxed{\tan\theta = \sqrt{2}, \qquad \theta = \arctan\sqrt{2} \approx 54.7^\circ}$$

を得る。このとき頂点は砲から距離 $D = \dfrac{u^2}{\sqrt{3}\,g}$ の位置にある。

下降中に砲弾は近づいてくるか？

時刻 t における砲からの距離の 2 乗を $r^2 = x^2 + y^2$ とする。砲弾が近づくのは r^2 が減少しているときにちょうど限られるので、

$$\tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2) = x\dot{x} + y\dot{y}.$$

の符号を調べればよい。

> **考えてみよう** 頂点での距離と、その後のいくつかの点での距離を比べるだけではなぜいけないのだろうか？

いくつかの点を調べただけでは、その間で距離が一時的に縮む可能性を排除できない。導関数を使えば、飛行中の**すべての**瞬間について一度に知ることができる。$\dot{x} = u\cos\theta$、

$\dot{y} = u\sin\theta - gt$ より

$$\begin{aligned} x\dot{x} + y\dot{y} &= u^2 t\cos^2\theta + \left(ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2\right)(u\sin\theta - gt) \\ &= u^2 t - \tfrac{3}{2}ugt^2\sin\theta + \tfrac{1}{2}g^2t^3 \\ &= \tfrac{1}{2}t\left[(gt)^2 - 3u\sin\theta\,(gt) + 2u^2\right], \end{aligned}$$

ここで $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いた。$t > 0$ では符号は括弧内の gt についての 2 次式の符号と一致する。平方完成すると

$$(gt)^2 - 3u\sin\theta\,(gt) + 2u^2 = \left(gt - \tfrac{3}{2}u\sin\theta\right)^2 + u^2\left(2 - \tfrac{9}{4}\sin^2\theta\right).$$

選んだ角度では $\sin^2\theta = \frac{2}{3}$ なので、定数項は $u^2\left(2 - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}u^2 > 0$ である。したがって括弧内はすべての t で正であり、r^2 は飛行全体を通じて狭義単調増加（strictly increasing）である。

よって答えは**いいえ**である。砲弾は落下する間ずっと砲手から着実に遠ざかっていき、下降経路のうち最も近い点は頂点そのものである。これにより、最高点での爆発だけを考えるという砲手の簡便法が正当であったことがわかる。この角度では、それが実際に下降経路で最も近い点を与え、その距離は $u^2/(\sqrt{3}\,g)$ である。

検算

- $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき頂点は $(u^2/2g,\, u^2/4g)$ にあり、$D^2 = \frac{5}{16}u^4/g^2$ となる。これは最大値 $\frac{1}{3}u^4/g^2$ よりわずかに小さく、そうなるべきである。
- 一般の計算から、砲弾が一度でも近づいてくるのは $\frac{9}{4}\sin^2\theta \geq 2$、すなわち $\sin\theta \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}$ のときに限ることがわかる。これは約 70.5° の角度であり、54.7° を十分に上回る。（極限 $\theta \to \frac{\pi}{2}$ も納得がいく。真上に撃った砲弾は砲に向かってまっすぐ落ちてくる。）
- 数値的に、$u = g = 1$ として θ を探索すると、頂点までの距離の最大値 $0.57735 \approx 1/\sqrt{3}$ が $\theta \approx 54.736°$ で得られる。その角度で軌道（trajectory）に沿って少しずつ調べると、O からの距離は決して減少しない。$70.5° \pm 0.6°$ のあたりで、単調（monotonic）から単調でない状態へと切り替わる。

よくある間違い

- 頂点の砲からの直線距離ではなく、水平距離や高さを最大化してしまう。
- 砲弾は水平方向に遠ざかり続けるのだから、頂点を過ぎれば砲からの距離は当然増加すると思い込む。砲弾は同時に落下しており、十分に急な角度で撃てば実際に近

づいてくる。

STEP のその先へ

r ではなく r^2 を微分し、$\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}$ の符号を読み取るという手法は、動点が近づいているか遠ざかっているかを判定する標準的な方法であり、ベクトル力学（vector mechanics）全般や軌道の研究に登場する。しきい値の角度 $\arcsin(2\sqrt{2}/3)$ は古典的な結果である。これより小さい角度では、投射体の発射点からの距離は常に増加する。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、この種の議論を自然なものにする、運動へのベクトル的アプローチを展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。