解答例

STEP II 1991、第 10 問

純粋数学 • 空間の直線と平面

> **STEP II 1991、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q10

鍵となる考え方

データベース上の分類にかかわらず、これは 3 次元空間における直線（line）と平面（plane）の問題である。影の先端は、棒の先端をかすめる太陽光線が地面と交わる点である。そこで、光線を太陽と棒の先端を通る直線として表し、地面を棒の根元を通り棒に垂直な平面として表して、両者の交点を求める。すべての位置を棒の向きの単位ベクトル（unit vector）を用いて表せば、あとは易しい。

解答

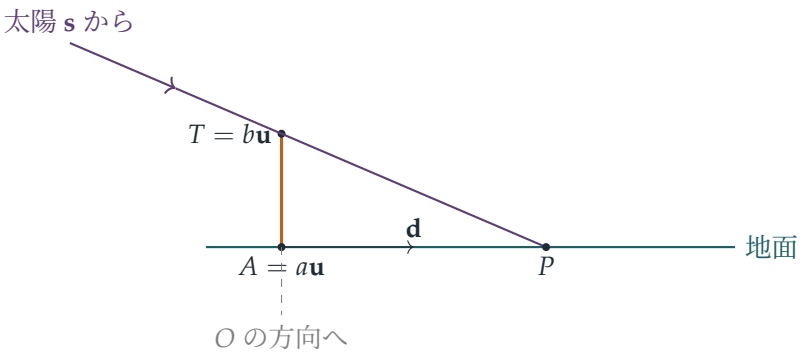
地球の中心を O とし、

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{s} = R \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

とおく。このとき $\mathbf{u}$ は棒の向きの単位ベクトルであり、棒の根元は $A = a\mathbf{u}$、先端は $T = b\mathbf{u}$、太陽は $\mathbf{s}$ にある。必要な内積（dot product）はただ一つで、

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{u} = R \sin\theta \cos\phi.$$

である。簡単のため $c = R\cos\phi\sin\theta$ と書く。



先端を通る光線

影の先端 P に届く光は、ちょうど棒の先端をかすめてきたものである。よって P は $\mathbf{s}$ と $b\mathbf{u}$ を通る直線上にあり、ある実数 t を用いて

$$\mathbf{p} = \mathbf{s} + t\,(b\mathbf{u} - \mathbf{s}) = (1-t)\,\mathbf{s} + tb\,\mathbf{u}$$

と表される。

地面

地面は水平、すなわち棒に垂直であり、根元 $a\mathbf{u}$ を通る。$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 1$ であるから、地面は平面 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{u} = a$ である。

交点を求める

直線の式を平面の式に代入し、$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 1$ と $\mathbf{s}\cdot\mathbf{u} = c$ を用いると、

$$(1-t)c + tb = a \qquad \Longrightarrow \qquad t = \frac{c-a}{c-b}.$$

を得る。$c-b$ で割ってよいのは、太陽が棒を照らしているからである。棒の先端において太陽が地平線より上にあるのは、太陽がそこでの接平面（tangent plane）の向こう側にあるとき、すなわち $\mathbf{s}\cdot\mathbf{u} > b$ のときであり、ちょうどそのときに限る。したがって $c > b$ である。

> **考えてみよう** この P は本当に棒の向こう側の地面上にあり、太陽の後ろ側のどこかにあるのではないといえるか？

$c > b > a$ であるから $c-a > c-b > 0$ となり、$t > 1$ である。$t = 0$ の点が太陽、$t = 1$ の点が棒の先端であるから、$t > 1$ は先端を越えて太陽から遠ざかる側にあり、あるべき位置にある。

t の値から、

$$1-t=\frac{(c-b)-(c-a)}{c-b}=\frac{a-b}{c-b}=-\frac{h}{c-b},$$
$$tb-a=\frac{b(c-a)-a(c-b)}{c-b}=\frac{c(b-a)}{c-b}=\frac{ch}{c-b}.$$

よって、根元から影の先端への変位（displacement）は

$$\begin{aligned}\mathbf{d}=\mathbf{p}-a\mathbf{u}&=(1-t)\,\mathbf{s}+(tb-a)\,\mathbf{u}\\&=\frac{h}{c-b}(c\,\mathbf{u}-\mathbf{s})\\&=\frac{Rh}{c-b}\left[\cos\phi\sin\theta\begin{pmatrix}0\\\cos\phi\\\sin\phi\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\\0\end{pmatrix}\right]\\&=\frac{Rh}{c-b}\begin{pmatrix}-\cos\theta\\-(1-\cos^2\phi)\sin\theta\\\cos\phi\sin\phi\sin\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

である。$1-\cos^2\phi=\sin^2\phi$ かつ $c-b=R\cos\phi\sin\theta-b$ であるから、これは

$$\mathbf{d}=Rh\,(R\cos\phi\sin\theta-b)^{-1}\begin{pmatrix}-\cos\theta\\-\sin^2\phi\sin\theta\\\cos\phi\sin\phi\sin\theta\end{pmatrix},$$

となり、求める式が得られた。

途中の行 $\mathbf{d}=\frac{h}{c-b}(c\,\mathbf{u}-\mathbf{s})$ は注目に値する。ベクトル $c\,\mathbf{u}$ は $\mathbf{s}$ の棒の向きの成分（component）であるから、$c\,\mathbf{u}-\mathbf{s}$ は太陽の位置ベクトル（position vector）の水平部分に負号をつけたものである。つまり影は太陽の水平方向とちょうど反対向きに伸びる。これは経験から予想されるとおりである。

検算

- $\mathbf{d}\cdot\mathbf{u}=\frac{Rh}{c-b}\left(-\sin^2\phi\sin\theta\cos\phi+\cos\phi\sin^2\phi\sin\theta\right)=0$ であるから、影は地面に沿っている。
- $\phi=0$ とすると、棒は y 軸の向きを向く。このとき $\mathbf{d}=\frac{Rh}{R\sin\theta-b}(-\cos\theta,0,0)$ である。$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき太陽は真上にあり、影は消える。R が非常に大きいとき、影の長さは $h\cot\theta$ に近づく。これは、高度 θ にある太陽に対する、平らな地球でのおなじみの答えである。

- 数値的にも、太陽が地平線より上にあるような R, a, h, θ, ϕ を無作為に何千通りも選び、光線と地面の平面の交点を直接求めて影の先端を定めた。結果は常に公式と一致し、相対誤差は最大でも約 10^{-13} であった。

よくある間違い

- 地面を平面 $y = a\cos\phi$ や、ほかの座標平面とみなしてしまう。「水平」とは $\mathbf{u}$ に垂直という意味であり、地面は $\mathbf{r}\cdot\mathbf{u} = a$ である。
- 最初からすべてを成分で展開してしまう。$\mathbf{u}$ と $\mathbf{s}$ を最後の行までベクトルのまま扱えば、計算が大幅に省ける。

STEP のその先へ

ここでの太陽光は一点（太陽）を通る直線の族であるから、影は棒の地面の平面への**中心射影**（central projection）である。太陽が非常に遠くにあるとき、光線はほぼ平行になり、この射影は平行射影（parallel projection）になる。これは線形代数（linear algebra）が研究する種類の写像であり、ベクトル $c\,\mathbf{u} - \mathbf{s}$ は、$\mathbf{s}$ の棒への射影から $\mathbf{s}$ 自身を引いたものである。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、直線や平面への射影を詳しく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。