解答例

STEP II 1991、第 1 問

純粋数学 • 2 次式と判別式

> **STEP II 1991、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q1

鍵となる考え方

二次式（quadratic）が完全平方式（perfect square）の定数倍になるのは、それが重解（repeated root）をもつとき、すなわち判別式（discriminant）が 0 になるときであり、またそのときに限る。後に続くどの部分も、係数が λ に依存する二次式にこのただ一つの条件を当てはめたものである。判別式を 0 にする λ を求めると λ についての二次式が得られ、分解は f と g についての二つの一次方程式を解くことで得られる。

解答

$(*)$ の形になるための条件

展開すると

$$a(x+k)^2 = ax^2 + 2akx + ak^2.$$

$\mathrm{h}(x)$ がこの形であれば、係数比較（comparing coefficients）により $b = 2ak$ かつ $c = ak^2$ であるから、

$$b^2 = 4a^2k^2 = 4a \cdot ak^2 = 4ac.$$

逆に $b^2 = 4ac$ ならば、$k = \dfrac{b}{2a}$ とおく（$a \neq 0$ なのでこれは可能である）。すると $2ak = b$ かつ $ak^2 = \dfrac{b^2}{4a} = c$ となるので、$\mathrm{h}(x) = a(x+k)^2$ である。したがって条件は

$$b^2 = 4ac,$$

であり、これは判別式が 0 であることを意味する。

λ の二つの値

$$\mathrm{f}(x)+\lambda \mathrm{g}(x)=(3+\lambda)x^2+4x-2\lambda.$$

である。$\lambda=-3$ のとき、これは $4x+6$ となる。$(*)$ の形には x^2 の係数が o でないことが必要なので、これは $(*)$ の形ではない。よって $3+\lambda\neq 0$ であり、上の条件から

$$16=4(3+\lambda)(-2\lambda) \iff \lambda^2+3\lambda+2=0 \iff (\lambda+1)(\lambda+2)=0.$$

が必要である。ゆえに $\lambda=-1$ または $\lambda=-2$ であり、どちらも -3 ではない。具体的には

$$\mathrm{f}(x)-\mathrm{g}(x)=2x^2+4x+2=2(x+1)^2,$$
$$\mathrm{f}(x)-2\mathrm{g}(x)=x^2+4x+4=(x+2)^2.$$

分解

考えてみよう $\mathrm{f}-\mathrm{g}$ と $\mathrm{f}-2\mathrm{g}$ についての二つの事実から、どうすれば f と g をそれぞれ求められるだろうか。

上に示した二つの恒等式（identities）を、未知数 $\mathrm{f}(x)$ と $\mathrm{g}(x)$ についての連立一次方程式（simultaneous linear equations）とみなす。第一式から第二式を引くと

$$\mathrm{g}(x)=2(x+1)^2-(x+2)^2,$$

が得られ、さらに $\mathrm{f}(x)=(\mathrm{f}(x)-2\mathrm{g}(x))+2\mathrm{g}(x)=(x+2)^2+4(x+1)^2-2(x+2)^2$、すなわち

$$\mathrm{f}(x)=4(x+1)^2-(x+2)^2.$$

となる。展開して確かめると、$4(x^2+2x+1)-(x^2+4x+4)=3x^2+4x$ であり、$2(x^2+2x+1)-(x^2+4x+4)=x^2-2$ である。よって一つの選び方は

$$A=4,\quad B=-1,\quad C=2,\quad D=-1,\quad m=1,\quad n=2.$$

である。m と n の役割を入れ替えると、同等な答え $m=2$、$n=1$、$A=-1$、$B=4$、$C=-1$、$D=2$ が得られる。

最後の部分

このとき

$$\mathrm{f}(x)+\lambda \mathrm{g}(x)=(3+\lambda)x^2+4x+\lambda\alpha.$$

である。先ほどと同様に、$\lambda=-3$ では一次式 $4x-3\alpha$ となり、これは決して $(*)$ の形にはならない。$\lambda\neq -3$ のとき、条件 $b^2=4ac$ は

$$16=4(3+\lambda)\lambda\alpha \iff \alpha\lambda^2+3\alpha\lambda-4=0. \qquad (\dagger)$$

となる。(†) を満たし、かつ $\lambda \neq -3$ である λ の値がちょうど一つであるようにしたい。

> **考えてみよう** (†) が二つの解をもち、そのうち一つが除外される値 $\lambda = -3$ である、ということはありうるだろうか。

ありえない。(†) の左辺に $\lambda = -3$ を代入すると $9\alpha - 9\alpha - 4 = -4 \neq 0$ となるので、$\lambda = -3$ が解になることはない。したがって条件を満たす λ の値は、ちょうど (†) の解である。

- $\alpha = 0$ ならば、(†) は $-4 = 0$ となり、解をもたない。よって $\alpha \neq 0$ である。
- $\alpha \neq 0$ ならば、(†) は λ についての真の二次方程式である。これがちょうど一つの解をもつのは、判別式が 0 のとき、かつそのときに限る：

$$9\alpha^2 + 16\alpha = 0 \iff \alpha(9\alpha + 16) = 0 \iff \alpha = -\tfrac{16}{9},$$

ここで $\alpha \neq 0$ を用いた。

ゆえに

$$\alpha = -\frac{16}{9}.$$

である。重解は $\lambda = -\frac{3\alpha}{2\alpha} = -\frac{3}{2}$ であり、実際

$$f(x) - \tfrac{3}{2}\left(x^2 - \tfrac{16}{9}\right) = \tfrac{3}{2}x^2 + 4x + \tfrac{8}{3} = \tfrac{3}{2}\left(x + \tfrac{4}{3}\right)^2.$$

となる。

検算

分解をある値で展開して確かめる。$x = 1$ のとき、$4(2)^2 - (3)^2 = 7 = f(1)$ かつ $2(2)^2 - 3^2 = -1 = g(1)$ である。最後の部分では、$\frac{3}{2}(x + \frac{4}{3})^2$ の $x = 0$ での値は $\frac{3}{2} \cdot \frac{16}{9} = \frac{8}{3}$ であり、$\lambda\alpha = (-\frac{3}{2})(-\frac{16}{9})$ と一致する。$|p| \leq 60$、$q \leq 12$ を満たすすべての有理数 $\lambda = p/q$ をコンピュータで調べたところ、中間の部分ではちょうど $\lambda = -1, -2$ が、$\alpha = -\frac{16}{9}$ のときには $\lambda = -\frac{3}{2}$ のみが見つかった。

よくある間違い

- (∗) における条件 $a \neq 0$ を忘れること。$\lambda = -3$ では式が一次式になるので、その値が除外される理由を述べるべきである。
- 最後の部分で、「(†) の判別式が 0」で止まってしまい、$\alpha = 0$ の場合を扱わないこと。このとき (†) はそもそも二次式ではなく、解をもたない。

STEP のその先へ

f と g を一次形式（linear forms）の二つの平方の結合として表すことは、二つの二次形式（quadratic forms）の同時対角化（simultaneous diagonalisation）にほかならない。$f + \lambda g$ を退化（degenerate）させる λ の値は、対応する対称行列（symmetric matrices）についての $\det(F + \lambda G) = 0$ の解であり、これは「一般化固有値（generalised eigenvalue）」問題である。二つの λ の値が一致する最後の部分は、まさにそのような対角化が失敗しうる場合である。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、二次形式と固有値をこうした観点から扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。