解答例

STEP I 1991、第 9 問

純粋数学 • 不等式と調和級数

> **STEP I 1991、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q9

鍵となる考え方

小問 (i) では、各不等式（inequality）が x を 2 つの k 乗根の間に挟み込んでいる。要点は、互いに矛盾する下界（lower bound）と上界（upper bound）を 1 つずつ見つけることである。電卓を使わずに 3 乗根と 5 乗根を比較するには、両辺を 15 乗すればよい。小問 (ii) では、長い和を（項の数）×（最小の項）で下から評価する。そのうえで、この形の互いに重ならないブロックをつなぎ合わせることで、調和級数（harmonic series）の和をいくらでも大きくできる。

解答

小問 (i)

$x > 1$ であるから、x のべき乗はすべて正である。正の数どうしの不等式の両辺を正の指数でべき乗しても、不等号の向きは変わらない。以下ではこの事実を常に用いる。

背理法（proof by contradiction）により、$n \geq 5$ と仮定する。このとき特に、3 番目と 5 番目の不等式が成り立つ：

$$x^3 > 3 \qquad \text{かつ} \qquad x^5 < 6.$$

1 つ目の両辺を 5 乗し、2 つ目の両辺を 3 乗すると、

$$x^{15} > 3^5 = 243 \qquad \text{かつ} \qquad x^{15} < 6^3 = 216.$$

これより $243 < x^{15} < 216$ となるが、これはあり得ない。よって $n \geq 5$ とはなり得ず、したがって $n \leq 4$ である。

考えてみよう 3 番目と 5 番目の不等式を選べばよいと、どうすればわかるだろうか？

各不等式は $k^{1/k} < x < (k+1)^{1/k}$ を意味している。下界 $k^{1/k}$ は 1, 1.41, 1.44, 1.41, 1.38, ...と変化し、$k = 3$ で最大となる。上界 $(k+1)^{1/k}$ は減少していき、$3^{1/3} \approx 1.44$ を初めて下回るのは $6^{1/5} \approx 1.43$ である。暗算による大まかな見積もりでこの組が見当づけられ、15 乗をとることでそれが厳密に証明される。（$n = 4$ は実際に起こり得る。たとえば $x = 1.45$ とすると、$x^2 = 2.1025$、$x^3 \approx 3.05$、$x^4 \approx 4.42$ となる。）

小問 (ii)

$n \geq 2$ とする。和 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ は $n^2 - n$ 個の項からなり、各項は最後の項 $\frac{1}{n^2}$ 以上である。$n \geq 2$ より項は $n^2 - n \geq 2$ 個あるので、最初の項 $\frac{1}{n+1}$ は $\frac{1}{n^2}$ より真に大きい。したがって

$$\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2} > (n^2 - n) \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}.$$

両辺に $\frac{1}{n}$ を加えると、

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 1,$$

となり、示すべき式が得られた。

調和級数の和を 10 より大きくする $m \geq 2$ のとき、各ブロック $\frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m^2}$ は 1 より大きい寄与をする。これを複数使うには、互いに重ならないブロックが必要なので、各ブロックを直前のブロックが終わったすぐ次から始めることにする。

$$a_1 = 2, \qquad a_{k+1} = a_k^2 + 1,$$

と定めると、$a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 26$, $a_4 = 677, \ldots$ である。第 k ブロックは $\frac{1}{a_k}$ から $\frac{1}{a_k^2}$ までであり、次のブロックは $\frac{1}{a_k^2+1} = \frac{1}{a_{k+1}}$ から始まる。よって $k = 1, \ldots, 9$ のブロックは互いに重ならず連続しており、合わせて $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{a_9^2}$ を覆う。したがって

$$\sum_{n=1}^{a_9^2} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{k=1}^{9} \left(\frac{1}{a_k} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} \right) > 1 + 9 = 10.$$

考えてみよう a_9^2 はとてつもなく大きな数である。代わりに N を具体的に示すことはできるだろうか？

できる。a_k を上から評価すればよい。$a_k < 2^{2^k}$ が成り立つことを示す。$k = 1$ のときは $2 < 4$ より成り立つ。$a_k < 2^{2^k}$ ならば $a_k \leq 2^{2^k} - 1$ であるから、

$$a_{k+1} = a_k^2 + 1 \leq (2^{2^k} - 1)^2 + 1 = 2^{2^{k+1}} - 2^{2^k+1} + 2 < 2^{2^{k+1}}.$$

よって数学的帰納法（induction）により $a_9 < 2^{512}$、$a_9^2 < 2^{1024}$ である。正の項をさらに加えても和は大きくなるだけなので、

$$N = 2^{1024} \quad \text{とすれば} \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > 10.$$

これより大きい N でもよい。

別解： $\frac{1}{2^j+1} + \cdots + \frac{1}{2^{j+1}}$ という形のブロックにまとめると、各ブロックは 2^j 個の項からなり、どの項も $\frac{1}{2^{j+1}}$ 以上である。これより、各ブロックは $j \geq 1$ のとき $\frac{1}{2}$ より大きく、$j = 0$ のとき $\frac{1}{2}$ に等しい。よって $\sum_{n=1}^{2^{18}} \frac{1}{n} > 1 + \frac{18}{2} = 10$ であり、$N = 2^{18} = 262\,144$ というはるかに小さな答えが得られる。

検算

- 小問 (i)：数値的には、$n = 4$ のとき不等式から $x \in (3^{1/3}, 5^{1/4}) \approx (1.442, 1.495)$ が残る。5 番目の不等式を加えると $x < 6^{1/5} \approx 1.431$ となり、何も残らない。
- 小問 (ii)：分数で正確に計算すると $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1$ であり、2 から 39 までのすべての n についてブロックの和は 1 を超える。
- 調和級数の和が初めて 10 を超えるのは $N = 12\,367$ のときであり、正しい答えはすべてこれ以上でなければならない。2^{18}（このとき和は約 13.05）も 2^{1024} も、これを十分に上回っている。

よくある間違い

- 両辺が正であること（ここでは $x > 1$ により保証される）に触れずに、不等式をべき乗してしまう。
- 端点を共有するブロック $[2,4]$, $[4,16]$, $[16,256]$, ...を用いてしまい、一部の項を二重に数えてしまう。
- 小問 (ii) で、少なくとも 1 つの項が $\frac{1}{n^2}$ より真に大きいことを確かめずに、$>$ ではなく $\geq$ と書いてしまう。

STEP のその先へ

小問 (ii) は、コーシー（Cauchy）の凝集判定法（Cauchy condensation test）の考え方の一種である。これにより調和級数が発散（diverge）することが証明されるが、その発散は驚くほど遅い。部分和（partial sum）は $\ln N + \gamma$ のように増加する。ここで

$\gamma \approx 0.5772$ はオイラー–マスケローニ定数（Euler–Mascheroni constant）である。和を積分と比較するとこの増加の速さが得られ、最小の N も容易に見積もることができる（$e^{10-\gamma} \approx 12\,367$）。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、凝集判定法と級数の収束を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。