解答例

STEP I 1991、第 8 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP I 1991、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q8

鍵となる考え方

置換（substitution）$y = \pi - x$ は区間 $[0, \pi]$ をそれ自身に写し、$\sin x$ を変えないが、扱いにくい因子 x を $\pi - y$ に変える。積分とその「折り返し」を足し合わせると、x は完全に消えてしまう。小問 (ii) では、被積分関数（integrand）がある関数とその導関数（derivative）から組み立てられているので、うまく選んだ置換ひとつですべてが片づく。

解答

小問 (i)

$I = \displaystyle\int_0^{\pi} x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$ とおく。区間 $[0, \pi]$ の両端を入れ替え、かつ $\sin x$ を変えない置換がほしいので、$k = \pi$ とする。すなわち $x = \pi - y$ とおくと、$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$、$\sin x = \sin(\pi - y) = \sin y$ であり、$x = 0, \pi$ はそれぞれ $y = \pi, 0$ に対応する。すると

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi}^{0} (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,(-\mathrm{d}y) = \int_0^{\pi} (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y \\ &= \pi \int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y - I, \end{aligned}$$

となる。ここで y は単なるダミー変数（dummy variable）にすぎないので、最後の積分は再び I である。よって

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

? **考えてみよう** $\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}$ から $\pi \int_0^{\pi/2}$ へはどうすれば移れるか？

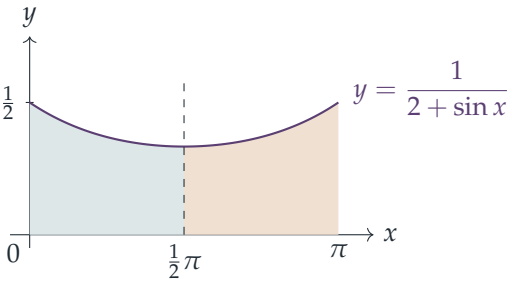
$\sin(\pi - x) = \sin x$ であるから、区間 $[0, \pi]$ 上の $\mathrm{f}(\sin x)$ のグラフは $x = \frac{1}{2}\pi$ に関して対称である。これを厳密に述べるため、積分を $\frac{1}{2}\pi$ で分割し、後半に同じ置換 $x = \pi - y$ を用いる：

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^{0} \mathrm{f}(\sin y)\,(-\mathrm{d}y) = \int_{0}^{\pi/2} \mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y.$$

したがって $\int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$ であり、ゆえに

$$\int_0^{\pi} x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x,$$

が示された。



次に $\mathrm{f}(u) = \dfrac{1}{2+u}$ とする。これは $u \in [-1, 1]$ で連続（continuous）である。すると

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}.$$

残った積分には $t = \tan\frac{1}{2}x$ を用いる。このとき

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

であり、$x = 0, \frac{1}{2}\pi$ はそれぞれ $t = 0, 1$ に対応する。すると

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} &= \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{2(1+t^2)+2t} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\sqrt{3} - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

よって

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi^2}{9}.$$

小問 (ii)

考えてみよう $(\sin^{-1} t)^2$ の導関数は何か？

合成関数の微分法（chain rule）により

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin^{-1} t)^2 = \frac{2\sin^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}},$$

であり、これはちょうど余弦に掛かっている因子の（2 倍）である。そこで $u = (\sin^{-1} t)^2$ と置換すると、$\mathrm{d}u = \dfrac{2\sin^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ である。$t = 0$ のとき $u = 0$ であり、$t = 1$ のとき $\sin^{-1} 1 = \frac{1}{2}\pi$ であるから $u = \frac{1}{4}\pi^2$ である。したがって

$$\int_0^1 \frac{(\sin^{-1} t)\cos[(\sin^{-1} t)^2]}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi^2/4} \cos u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi^2}{4}.$$

被積分関数は $t = 1$ で発散するので、厳密にはこれは広義積分（improper integral）である。置換によってこの点はすっきり処理できる。$\theta = \sin^{-1} t$ を用いると積分は $\int_0^{\pi/2} \theta\cos\theta^2\,\mathrm{d}\theta$ となり、その被積分関数は連続であるから、積分は収束（converge）し、上の値は正しい。（$\theta = \sin^{-1} t$、続いて $u = \theta^2$ と 2 段階で置換するのも、まったく問題のない別解である。）

答え $\frac{1}{2}\sin\frac{1}{4}\pi^2$ は厳密な値であり、これ以上簡単にはならない。$\frac{1}{4}\pi^2$ は「きれいな」角ではないのである。出題者が電卓に頼らないよう注意していたのは、おそらくこのためであろう。

検算

- シンプソンの公式（Simpson's rule）によれば $\int_0^{\pi} x/(2+\sin x)\,\mathrm{d}x \approx 1.899406$ であり、$\pi^2/(3\sqrt{3}) \approx 1.899406$ である。
- 簡単な妥当性の確認：$\frac{1}{3} \le \frac{1}{2+\sin x} \le \frac{1}{2}$ であるから、積分の値は $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 \approx 1.64$ と $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 \approx 2.47$ の間にある。
- (i) の等式は $\mathrm{f}(u) = 1$ で確かめられる。両辺とも $\frac{1}{2}\pi^2$ に等しい。
- (ii) については $\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{4}\pi^2) \approx 0.312133$ であり、これは $\int_0^{\pi/2} \theta\cos\theta^2\,\mathrm{d}\theta$ の数値計算の結果と一致する。

よくある間違い

- 積分区間を半分にすることを正当化せずに、$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$ で止めてしまう。

- $t = \tan\frac{1}{2}x$ と置換するときに積分の上端・下端を変え忘れる（上端は ∞ ではなく 1 になる）。
- 小問 (ii) で因子 $\frac{1}{2}$ を落とす：$\mathrm{d}u$ には 2 が含まれている。

STEP のその先へ

小問 (i) の技法、すなわち区間の対称性（symmetry）を利用して、原始関数（antiderivative）を一度も求めずに $\int x\,g(x)\,\mathrm{d}x$ を計算するという方法は、ある大きなテーマの小さな一例である。そのテーマとは、対称性を使えば計算よりも手軽に積分の値がわかることが多い、ということである。小問 (ii) は広義積分の理論に触れている。そこでは変数変換（change of variables）によって、有界でない被積分関数を連続なものに変えられることがある。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）は変数変換の定理を厳密に扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）にはこの種の積分がほかにも数多く収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。