解答例

STEP I 1991、第 7 問

純粋数学 ・ 変数分離形の微分方程式

> **STEP I 1991、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q7

鍵となる考え方

どちらの変化率も $(1+V/V_0)^2$ の定数倍であるから、自然な変数は $u = 1 + V/V_0$ であり、これは $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \pm c\,u^2$ を満たす。変数分離（separation of variables）を行うと、逆数（*reciprocal*） $w = 1/u$ は単に一次関数的に変化することがわかる。すなわち、成長の年には割合 a で減少し、衰退の年には割合 b で増加する。こうして問題全体は、1 本の折れ線グラフを追いかけて次の二つの問いに答えることに帰着する。w は 0 に達するか（資金が無限大になる）、それとも 1 に達するか（国庫（Treasury）が空になる）。

解答

設定

t を年単位で測り、$V = kV_0$ とおく。すると $u = 1 + k$ であり、$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = V_0\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ である。成長の年には

$$V_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = aV_0u^2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = a \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u}\right) = -a,$$

となり、同様に衰退の年には（$V > 0$ である間）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u}\right) = +b$ となる。したがって

$$w = \frac{1}{1+V/V_0},$$

とおくと、w は成長期には割合 a で一次関数的に減少し、衰退期には割合 b で一次関数的に増加する。$V \geq 0$ は $0 < w \leq 1$ に対応することに注意する。国庫が空になるのはちょうど $w = 1$ のときであり、$V \to \infty$ となるのはちょうど $w \to 0^+$ のときである。

不等式の意味

最初は $w = w_0 = \frac{1}{1+k_0}$ であり、1 年目の間は $w = w_0 - at$ である。このとき次のことがいえる。

- $k_0 \geq 0$ は、単に国庫が負の額の資金を保有できないことを述べている。
- 1 年目を通じて資金が有限にとどまるのは、w が $t = 1$ まで正であり続けるとき、すなわち $w_0 - a > 0$ のときに限る。これは

$$\frac{1}{1+k_0} > a \iff 1 + k_0 < \frac{1}{a} \iff k_0 < a^{-1} - 1.$$

  である。これが成り立たなければ、V はまさに 1 年目のうちに、時刻 $t = w_0/a \leq 1$ で無限大になってしまう。これは現実の国庫のモデルとしてはあり得ない。

さらに、これらの不等式を合わせると $a^{-1} - 1 > 0$、すなわち $a < 1$ も導かれる。これは最後に用いる。

2 年目を乗り切る

1 年目の終わりには $w_1 = \frac{1}{1+k_1}$ である（実際 $w_1 = w_0 - a$ である）。衰退の年の間は、$w < 1$ である限り $w = w_1 + bt$ である。その年の終わりに国庫がまだ空でないのは、$t = 1$ までに w が 1 に達していないときに限る。すなわち

$$\frac{1}{1+k_1} + b < 1 \iff b < \frac{k_1}{1+k_1}.$$

特に $b < 1$ が必要であり、そのもとでこれを変形すると

$$k_1 > \frac{b}{1-b}.$$

となる。逆に $b \geq \frac{k_1}{1+k_1}$ ならば、資金は時刻 $t = (1 - w_1)/b \leq 1$ で尽き、その年の残りの期間はずっと 0 のままである。

3 年目における無制限の増大

考えてみよう 2 年目に国庫が空になったらどうなるか。それでも 3 年目に爆発することはあり得るだろうか。

2 年目の終わりに国庫が空であれば、3 年目は $w = 1$ から始まり $w = 1 - at$ となる。$a < 1$ であるから、これはその年の間ずっと正である。したがって空の国庫が 3 年目に爆発することはなく、2 年目を資金が乗り切る場合だけを考えればよい。

その場合 $w_2 = w_1 + b = \frac{1}{1+k_0} - a + b$ であり、3 年目には $w = w_2 - at$ である。3 年目の間に資金が無制限になるのは、$t = 1$ までに w が 0 に達するとき、すなわち $w_2 \leq a$

のときに限る。

$$\frac{1}{1+k_0} - a + b \le a \iff b \le 2a - \frac{1}{1+k_0}.$$

これが「ただし、それより前ではない」という条件と矛盾しないことを確かめなければならない。

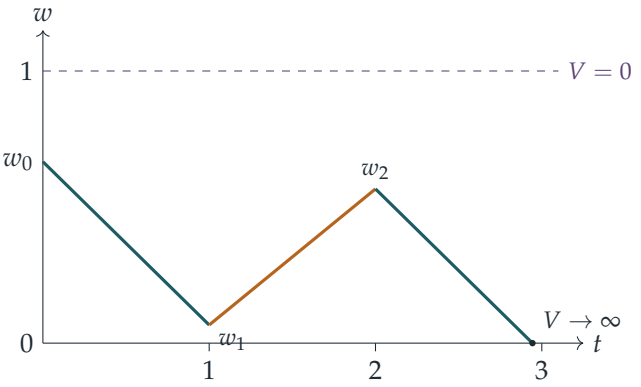
- 1 年目に爆発が起こらないことは $k_0 < a^{-1} - 1$ によって保証されており、資金が減少している 2 年目には爆発は起こり得ない。
- 資金は 2 年目を乗り切る。$w_2 \le a$ ならば、$a < 1$ より $w_2 < 1$ であるから、乗り切るための条件 $w_2 < 1$ は自動的に満たされる。

よって、モデルが 3 年目に（それより前ではなく）無制限の増大を予測するのは、ちょうど

$$b \le 2a - \frac{1}{1+k_0}.$$

のときである。不等号が狭義であれば、V は 3 年目に入って時刻 $t = w_2/a < 1$ で無限大になる。等号の場合は、ちょうど 3 年目が終わるときに $V \to \infty$ となる。（$b > 0$ であるから、これが起こり得るのは $2a > \frac{1}{1+k_0}$、すなわち $k_0 > \frac{1}{2a} - 1$ のときに限る。）

次の図は、条件が成り立つ例として $a = 0.6$、$b = 0.5$、$k_0 = 0.5$ の場合に w を t に対して描いたものである。



検算

上の例では $k_1 = 14$ であり、乗り切るための条件 $14 > \frac{0.5}{0.5} = 1$ が成り立つ。このとき $k_2 = \frac{13}{17} \approx 0.765$ であり、3 年目の爆発は $t = w_2/a \approx 0.944$ で起こる。これは $2a - \frac{1}{1+k_0} - b = \frac{1}{30} > 0$ と整合している。また、a、b、k_0 を無作為に 300 通り選び、微分方程式（differential equation）を数値的に積分した（4 次のルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method））。k_1 と k_2 の閉じた式は約 10^{-11} の精度で一致し、乗り切る条

件と爆発の条件はいずれも、すべての場合において数値的な振る舞いを正しく予測した。

よくある間違い

- 2 年目に国庫が空になり得ることを忘れる。ここでは $a < 1$ であるため害はないが、そのことは述べておく必要がある。
- 爆発の条件を逆に取り違える。爆発に対応するのは $1/(1+k)$ が 0 に達することであり、k が 0 に達することではない。
- $\frac{1}{1+k_1} + b < 1$ を k_1 に関する条件に変形するときに、$b < 1$ という要請を無視する。

STEP のその先へ

方程式 $\dot{u} = au^2$ は**有限時間爆発**（*finite-time blow-up*）の標準的な例である。指数関数的増大（exponential growth）とは異なり、解が有限の時刻で無限大になり得るので、微分方程式の解がすべての時刻で存在するとは限らない。常微分方程式（ODE）の最初の講義では、ここで解の局所存在（local existence）と大域存在（global existence）の区別が現れる。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『常微分方程式入門』）では、非線形一階方程式を扱う箇所でこのことが論じられている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。