解答例

STEP I 1991、第 6 問

純粋数学 ・ 停留点と広義積分

STEP I 1991、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/91-s1-q6

この問題は、*Beyond STEP* の第 3.1 節「**誤りを見抜け**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/spot-the-flaw.html

鍵となる考え方

何ひとつ鵜呑みにしてはならない。すべての計算を自分でやり直し、「よって」「したがって」が現れるたびに、その推論が本当に成り立つかを問うことである。(i) では導関数（derivative）の計算が誤っており、たとえ正しい停留点（stationary point）が得られていたとしても、極大・極小（maxima, minima）や全体での上下界（global bounds）についての推論には欠陥がある。(ii) では原始関数（antiderivative）が誤っており、さらに深刻なことに、被積分関数（integrand）が区間の内部で発散するため、微積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）はそもそも適用できない。

解答

小問 (i)

ステップ 1：停留点。商の微分法（quotient rule）により、

$$\mathrm{g}'(x) = \frac{6x^2(x^4+4) - 4x^3(2x^3+3)}{(x^4+4)^2} = \frac{-2x^6 - 12x^3 + 24x^2}{(x^4+4)^2} = \frac{-2x^2\,(x^4+6x-12)}{(x^4+4)^2}.$$

したがって、$\mathrm{g}'(x) = 0$ となるのは $x = 0$ または $h(x) = 0$ のときであり、かつそのときに限る。ただし $h(x) = x^4 + 6x - 12$ である。ここで $h(1) = -5$、$h(-1) = -17$ であるから、$x = \pm 1$ は停留点では**ない**。実際、$\mathrm{g}'(1) = \frac{2}{5}$、$\mathrm{g}'(-1) = \frac{34}{25}$ である。主張は最初のステップで破綻している。

h はいくつの根をもつか。$h'(x) = 4x^3 + 6$ が 0 になるのは $x_0 = -(3/2)^{1/3}$ のみであるから、h は減少したのち増加し、したがって零点を横切るのは高々 2 回である。また $h(0) = -12 < 0$ であり、$x \to \pm\infty$ のとき $h(x) \to +\infty$ であるから、少なくとも 2 回は横切る。よって h はちょうど 2 つの実根 $\beta < 0 < \alpha$ をもつ。$h(1) < 0 < h(2) = 16$ かつ $h(-3) = 51 > 0 > h(-2) = -8$ であるから、

$$1 < \alpha < 2, \qquad -3 < \beta < -2,$$

であり、数値的には $\alpha \approx 1.386$、$\beta \approx -2.247$ である。

ステップ 2：停留値。$g(0) = \frac{3}{4}$ は正しく、$g(1) = 1$ も正しいが、$g(-1) = \frac{1}{5}$ であって 1 ではない（そもそも ± 1 のどちらの点も停留点ではない）。h の根 t においては $t^4 = 12 - 6t$ であるから、$t^3 = (12 - 6t)/t$ となり、

$$g(t) = \frac{2(12-6t)/t + 3}{16 - 6t} = \frac{24 - 9t}{t(16 - 6t)} = \frac{3(8-3t)}{2t(8-3t)} = \frac{3}{2t},$$

を得る。ここで $8 - 3t \neq 0$ で約分した（$t = \frac{8}{3}$ は h の根ではないからである）。したがって停留値は $g(0) = \frac{3}{4}$、$g(\alpha) = \frac{3}{2\alpha} \approx 1.083$、$g(\beta) = \frac{3}{2\beta} \approx -0.668$ である。

> **考えてみよう** ある停留値が別の停留値より小さいならば、小さいほうは必ず極小なのだろうか。

ステップ 3：停留点の種類。そうではない。停留点における値を比較しても、その種類については何もわからない。両側での g' の符号（あるいは g''）を調べなければならない。因数分解した形から、$x \neq 0$ のとき $x^2 > 0$ かつ $(x^4 + 4)^2 > 0$ であるので、$g'(x)$ の符号は $-h(x)$ の符号に一致する。(β, α) 上で $h < 0$、$[\beta, \alpha]$ の外で $h > 0$ であるから、

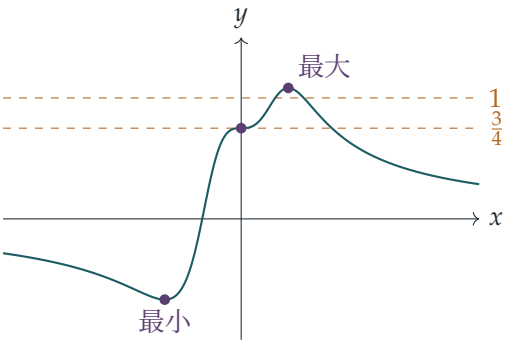
- g は $x < \beta$ で減少、(β, α) で増加、$x > \alpha$ で減少する。
- $x = \beta$ は極小、$x = \alpha$ は極大である。
- $x = 0$ では両側で $g' > 0$ であるから、$x = 0$ は停留点である変曲点（stationary point of inflection）であって、極小ではない。

ステップ 4：全体での上下界。正しい極大・極小が得られたとしても、「すべての x に対して」成り立つ評価を得るにはそれ以上のことが必要である。関数が別の場所、たとえば $x \to \pm\infty$ の方向で、極大値を超える可能性があるからである。ここでは $x \to \pm\infty$ のとき $g(x) \to 0$ であり（分母のほうが次数が高い）、$x^4 + 4 > 0$ であるから g は至るところ連続である。これとステップ 3 の単調性（monotonicity）を合わせると、g は 0 に近い値から $g(\beta)$ まで減少し、$g(\alpha)$ まで増加し、それから再び 0 に向かって減少する。よって正しい主張は

$$\frac{3}{2\beta} \leq g(x) \leq \frac{3}{2\alpha} \quad \text{任意の} x, \qquad \text{すなわちおよそ} -0.668 \leq g(x) \leq 1.083,$$

であり、上界・下界ともに実際に達成される。

結論。$\frac{3}{4} \le \mathrm{g}(x) \le 1$ という結論は両端とも誤りである。$\mathrm{g}(-1) = \frac{1}{5} < \frac{3}{4}$ であり（実際、$2x^3 + 3 < 0$ のときは常に $\mathrm{g}(x) < 0$ である）、また $\alpha < \frac{3}{2}$ であるから $\mathrm{g}(\alpha) > 1$ である（確認：$h(\frac{3}{2}) = \frac{81}{16} - 3 > 0$ より $\alpha < \frac{3}{2}$、したがって $\frac{3}{2\alpha} > 1$）。



小問 (ii)

ステップ 1：不定積分。与えられた答えは誤りである。$-3(1-x)^{-4}$ を微分すると $-12(1-x)^{-5}$ となり、$(1-x)^{-3}$ にはならない。指数は 1 だけ**上がる**べきであり、-3 から -2 になる。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x)^{-2} = -2(1-x)^{-3}\cdot(-1) = 2(1-x)^{-3},$$

であるから、正しい結果は

$$\int (1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(1-x)^{-2} + c, \qquad x \neq 1.$$

である。

考えてみよう 正しい原始関数を使っても、-1 から 3 までで $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = 0$ となる。では、結局答えは 0 なのだろうか。

ステップ 2：定積分。そうではない。$[F(x)]_{-1}^{3}$ を計算してよいのは、区間全体で $F' = f$ が成り立ち、かつそこで f が連続であるときに限られる。ここで $(1-x)^{-3}$ は $[-1,3]$ の内部にある $x = 1$ で定義されず、その近くで有界でもない。したがってこの積分は広義積分（improper integral）であり、2 つの部分それぞれの極限として定義しなければならない。

$$\int_{-1}^{1-\varepsilon} (1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon^{-2} - \tfrac{1}{4}\right) \to +\infty \quad (\varepsilon \to 0^{+}),$$

$$\int_{1+\delta}^{3} (1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4} - \delta^{-2}\right) \to -\infty \quad (\delta \to 0^{+}).$$

どちらの部分も発散（diverge）するので、この積分は存在しない。「$\infty - \infty$」には値がない。これは幾何学的にも納得がいく。被積分関数は $x < 1$ で正、$x > 1$ で負であり、それぞれの側が無限の面積を囲んでいるのである。

結論。どちらのステップも誤りであり、結論もそのままでは偽である。$\int_{-1}^{3}(1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x$ は定義されない。「0」という答えに一理あるのは、**対称な**すき間 $\varepsilon = \delta$ を切り取る場合だけである。このとき 2 つの部分はちょうど打ち消し合い、極限は 0 となる（コーシー（Cauchy）の主値（Cauchy principal value））。しかし、たとえば $\delta = 2\varepsilon$ とすると、和は $\frac{1}{2}(\varepsilon^{-2} - \frac{1}{4}\varepsilon^{-2}) \to \infty$ となる。つまり答えは $x = 1$ への近づき方に依存し、まさにそれゆえにこの積分は定義されないのである。

検算

g の数値微分は、無作為に選んだ点において因数分解した公式と一致する。$\mathrm{g}'(1) = 0.4 \neq 0$ である。二分法（bisection）により $\alpha \approx 1.3856$、$\beta \approx -2.2467$ が得られ、$\mathrm{g}(\alpha) = 1.0825 = 3/(2\alpha)$、$\mathrm{g}(\beta) = -0.6676 = 3/(2\beta)$ である。$[-100, 100]$ 上で g の値を標本として調べると、これらが最大値・最小値であることが確かめられる。(ii) については、$[-1, 0.99]$ 上の中点則（midpoint quadrature）による数値積分はおよそ 4999.87 となって $\frac{1}{2}(10^4 - \frac{1}{4})$ と一致し、対応する $[1.01, 3]$ 上の部分は -4999.87 となる。

よくある間違い

- 停留点の種類を、その値の比較によって判定してしまう。
- 全体での評価を主張するときに、$x \to \pm\infty$ での振る舞いを忘れる。
- 被積分関数が無限大になる点をまたいで $[F(x)]_a^b$ を適用してしまう。必ず先に、被積分関数が $[a, b]$ 上で連続であることを確かめること。

STEP のその先へ

小問 (ii) は広義積分に関するものである。特異点（singularity）を含む区間上の積分は極限として定義され、片側からの極限がそれぞれ別々に存在するときに限り収束する。対称な極限、すなわちコーシーの主値は、複素解析（complex analysis）や物理学において実に有用な考え方であるが、それは別の対象である。小問 (i) は局所的な極値と大域的な極値の違いに関するものであり、解析学ではこれを最大値・最小値の定理（extreme value theorem）によって厳密に扱う。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門）は、この両方を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。