解答例

STEP I 1991、第 5 問

純粋数学 • 正則なベクトルの組

> **STEP I 1991、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q5

鍵となる考え方

条件 (ii) はベクトル（vector）の和が $\mathbf{0}$ になることを述べている。ベクトルの等式を数の等式に変える最も手軽な方法は、ベクトルの一つとの内積（dot product）をとることであり、その値は条件 (i) によって計算できる。そこから先は、問題全体が数え上げの問題になる。いくつかの固定されたベクトルとの内積がすべて指定されたベクトルは、取りうる位置がごく限られる。したがって、集合に入るベクトルは少数しかありえないのである。

解答

等式 $(n-1)\beta = -\alpha^2$

(ii) より $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ である。両辺と $\mathbf{a}_1$ との内積をとる。(i) より、項 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1$ は α^2 であり、残りの $n-1$ 個の項 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_j$（$j \neq 1$）はいずれも β であるから、

$$\alpha^2 + (n-1)\beta = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad (n-1)\beta = -\alpha^2,$$

となり、示すべき式が得られた。特に $\beta = -\alpha^2/(n-1) < 0$ である。

2 次元の場合

このとき $\alpha^2 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1$ であるから、各 $\mathbf{a}_i$ は単位ベクトル（unit vector）であり、

$$\beta = -\frac{1}{n-1}.$$

$i \geq 2$ に対して $\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ とおく。条件 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_i = \beta$ は $x_i = \beta$ を意味し、さらに $|\mathbf{a}_i| = 1$ より $y_i = \pm\sqrt{1-\beta^2}$ でなければならない。よって、$\mathbf{a}_1$ 以外のベクトルはすべて

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \beta \\ -\sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix}.$$

のいずれかである。

考えてみよう 候補がわかると、n はどのように制限されるか。

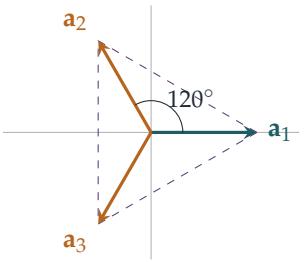
集合のベクトルは互いに異なるので、$\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ は $n-1$ 個の**相異なる**候補である。候補は高々2個しかないので $n-1 \leq 2$、すなわち $n \leq 3$ である。$n \geq 2$ であるから、$n = 2$ または $n = 3$ である。

$n = 2$ の場合。このとき $\beta = -1$ であるから、2つの候補は一致し、$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる。これは条件を満たす。実際、$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = -1 = \beta$ かつ $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$ である。

$n = 3$ の場合。このとき $\beta = -\frac{1}{2}$、$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であり、$\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ は2つの異なる候補

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{と} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

でなければならない（順序はどちらでもよい）。確認すると、$\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} = \beta$ であり、3つのベクトルの和は $\mathbf{0}$ である。これらは原点を中心とする正三角形（equilateral triangle）の頂点を指している。



（β を決定する別の方法：$n \geq 3$ のとき $-1 < \beta < 0$ であるから、2つの候補は確かに異なり、$\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ はその両方でなければならない。すると $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \beta^2 - (1-\beta^2) = 2\beta^2 - 1$ であり、これを β に等しいとおくと $(2\beta+1)(\beta-1) = 0$ を得る。よって $\beta = -\frac{1}{2}$ であり、やはり $n = 3$ となる。）

3 次元の場合

ここでも $\alpha = 1$、$\beta = -1/(n-1)$ である。$n = 2$ の場合は先ほどと同様である。すなわち $\beta = -1$ であり、$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = -1$ を満たす単位ベクトルは $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1 = (-1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ のみで、これは x-y 平面上にある。よって $\{\mathbf{a}_1, -\mathbf{a}_1\}$ は答えの一つである。

次に $n \geq 3$ と仮定する。このとき $-\frac{1}{2} \leq \beta < 0$ である。$\mathbf{a}_2$ は x-y 平面上にあるので、2 次元の場合と同じ議論により

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ \varepsilon\sqrt{1-\beta^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

となり、$\beta \neq \pm 1$ であるから y 成分 $y_2 = \varepsilon\sqrt{1-\beta^2}$ は 0 でない。

? **考えてみよう** $i \geq 3$ のとき、条件は $\mathbf{a}_i$ について何を述べているか。

$i \geq 3$ に対して $\mathbf{a}_i = (x_i, y_i, z_i)^{\mathrm{T}}$ とおく。すると

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_i = \beta &\implies x_i = \beta, \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_i = \beta &\implies \beta^2 + y_2 y_i = \beta \implies y_i = \frac{\beta(1-\beta)}{y_2}, \\ |\mathbf{a}_i| = 1 &\implies z_i^2 = 1 - \beta^2 - y_i^2. \end{aligned}$$

よって x_i と y_i はすべての $i \geq 3$ について同じであり、z_i は 2 つの平方根のいずれかにしかなりえない。ベクトルは互いに異なるので、$\mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n$ は高々 2 個であり、$n - 2 \leq 2$、すなわち $n \leq 4$ である。

$n = 3$ の場合。(ii) より $\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$ であり、これは x-y 平面上にある。よってこの集合は平面 $z = 0$ 内の正則な集合（regular set）であり、2 次元の結果から

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

となる。ただし $\mathbf{a}_2$ は後の 2 つのどちらでもよい。（上の公式とも一致する。実際、$\beta = -\frac{1}{2}$ のとき $y_3 = -y_2$、$z_3^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0$ となる。）

$n = 4$ の場合。このとき $\beta = -\frac{1}{3}$ であるから、$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$、$y_2 = \varepsilon\frac{2\sqrt{2}}{3}$ である。すると

$$y_i = \frac{(-\frac{1}{3})(\frac{4}{3})}{\varepsilon\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\varepsilon\frac{2}{3\sqrt{2}} = -\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{3}, \qquad z_i^2 = 1 - \frac{1}{9} - \frac{2}{9} = \frac{2}{3}.$$

$\mathbf{a}_3 \neq \mathbf{a}_4$ であるから、これらは互いに逆符号の 2 つの値 $z = \pm\sqrt{2/3} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ をとらな

ければならない。これより

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \varepsilon\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \pm\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix},$$

を得る。$\varepsilon = \pm 1$ のそれぞれについて 1 つの集合が得られる。ここまでは $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{a}_2$ が関わる条件しか用いていないので、残りの条件も確認しなければならない。まず、$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4 = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} - \frac{6}{9} = -\frac{1}{3} = \beta$ である。次に和について、x 成分は $1 - 3 \cdot \frac{1}{3} = 0$、$y$ 成分は $\varepsilon\left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = 0$ となり、z 成分は打ち消し合う。よって、どちらの集合も正則である。幾何学的には、4 つのベクトルは原点を中心とする正四面体（regular tetrahedron）の頂点を指している。

まとめ。正則な集合は、$\{\mathbf{a}_1, -\mathbf{a}_1\}$（$n = 2$）、$x$-$y$ 平面内の正三角形（$n = 3$）、および上で求めた 2 つの正四面体（$n = 4$、$\varepsilon = \pm 1$。x-z 平面に関して互いに鏡像（mirror image）の関係にある）である。$n \geq 5$ となる正則な集合は存在しない。

検算

各集合において、ベクトルの和は 0 になり、どの 2 つのベクトルの内積も等しくなるはずである。正四面体の場合、任意の 2 つのベクトルのなす角は $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109.47^\circ$ であり、これはおなじみのメタンの結合角である。また等式から $(4-1)\left(-\frac{1}{3}\right) = -1 = -\alpha^2$ を得る。5 つの集合すべてを数値的に確認し（グラム行列と重心（centroid）を 10^{-12} の精度で）、さらに平面上での総当たり探索により、n が 11 以下の範囲で正則な集合は $n = 2$ と $n = 3$ の場合にしか存在しないことを確かめた。

よくある間違い

- ベクトルが**互いに異なる**ことを忘れる。この条件こそが、「候補は高々 2 個」という事実を n の上界に変えるのである。
- $n = 4$ の場合に、$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ との内積から $\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$ を求めたあと、$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4 = \beta$ と重心の条件を確認しない。
- 3 次元の場合に、$n = 2$ の場合や符号 ε の選び方を見落とす。

STEP のその先へ

これらの集合は正単体（regular simplex）の頂点である。すなわち、$(n-1)$ 次元空間内の n 個の点で、どの 2 点間の距離も等しいものである。内積を並べた行列 $G = (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j)$

（グラム行列（Gram matrix））は $(\alpha^2-\beta)I+\beta J$ である。ここで J はすべての成分が 1 の行列である。この行列の階数（rank）は $n-1$ であり、グラム行列の階数は空間の次元を超えないから、d 次元では直ちに $n \leq d+1$ が得られる。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、階数、内積、グラム行列を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。