解答例

STEP I 1991、第 4 問

純粋数学 ・ 図形における最適化

> **STEP I 1991、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q4

鍵となる考え方

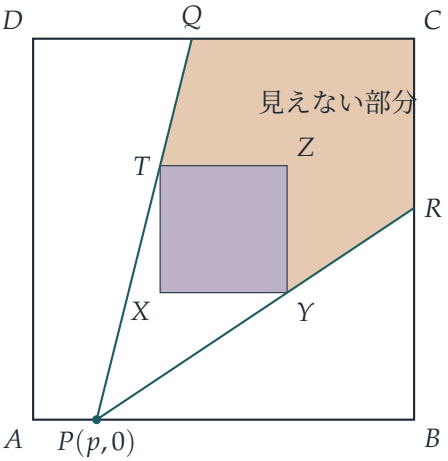
見張りには、塔の陰に隠れた点を除いて中庭のすべての点が見える。そこでヒントに従い、見張りの位置 $P=(p,0)$ から見た塔の「影」（shadow）の面積を求める。影は、P から出て塔をかすめる 2 本の半直線で囲まれる。これらの半直線が壁と交わる点を求め、影の面積を多角形の面積として計算すれば、問題は $[0,4]$ 上の 1 変数関数の最大化に帰着する。端点（endpoint）の確認を忘れないこと。

解答

設定

中庭は大きな正方形から塔を除いたもので、その面積は $144-16=128$ である。見張りの位置を $0\le p\le 4$ として $P=(p,0)$ とし、見張りから**見えない**部分の面積を $H(p)$ とする。見える部分の面積は $128-H(p)$ であるから、見える面積が最小になるのは H が最大のときであり、逆もまた成り立つ。

$p\le 4$ であるから、P は直線 $y=4$ より下にあり、直線 $x=4$ の左側（または直線上）にある。したがって P からは塔の下面 XY と左面 XT が見え、塔の輪郭は角 $T(4,8)$ と $Y(8,4)$ によって決まる。角 $Z(8,8)$ は角 TPY の内部にあり、隠れている。隠れた領域は、半直線 PT と PY の間で、経路 $T\to Z\to Y$ の向こう側にある。



かすめる半直線と壁の交点

P から $T(4,8)$ を通る半直線は、横に $4-p$ 進むごとに 8 上がるので、$y=12$ に達するのは

$$x = p + \tfrac{12}{8}(4-p) = 6 - \tfrac{p}{2}, \qquad \text{よって} Q = \left(6 - \tfrac{p}{2},\, 12\right).$$

のときである。$4 \le 6 - \frac{p}{2} \le 6$ であるから、この点は確かに上の壁 DC 上にある。

P から $Y(8,4)$ を通る半直線は、横に $8-p$ 進むごとに 4 上がるので、$x=12$ に達するのは

$$y = \frac{4(12-p)}{8-p}, \qquad \text{よって} R = \left(12,\, \frac{4(12-p)}{8-p}\right).$$

のときである。この値は p が 0 から 4 まで動くとき 6 から 8 まで増加するので、R は右の壁 BC 上にある。

見えない部分の面積

見えない領域は多角形 $TQCRYZ$ である。その面積は

$$H = [PRCQ] - [PYZT],$$

として求めるのが最も簡単である。ここで $[\cdots]$ は面積を表す。すなわち、2 本の半直線に挟まれ壁まで達するくさび形全体から、くさび形のうち塔の奥の面より手前にある部分（塔の手前の見える地面と塔そのもの）を除いたものである。

$P(p,0)$、$R(12,q)$、$C(12,12)$、$Q(r,12)$ に対して靴ひも公式（shoelace formula）を用い

る。ただし $q=\frac{4(12-p)}{8-p}$、$r=6-\frac{p}{2}$ である。

$$[PRCQ]=\tfrac{1}{2}(pq+(144-12q)+(144-12r)-12p)$$
$$=\tfrac{1}{2}(288-12p-12r-(12-p)q)=108-3p-\frac{2(12-p)^2}{8-p},$$

ここで $12r=72-6p$ を用いた。同様に、$P(p,0)$、$Y(8,4)$、$Z(8,8)$、$T(4,8)$ に対して

$$[PYZT]=\tfrac{1}{2}(4p+32+32-8p)=32-2p.$$

したがって

$$H(p)=76-p-\frac{2(12-p)^2}{8-p}.$$

考えてみよう 最適化しやすくなるような置換（substitution）はあるだろうか？

扱いにくい分母を見ると、$u=8-p$ とおくのがよさそうである。すると u は $[4,8]$ を動き、$12-p=u+4$ となる。このとき

$$H=76-(8-u)-\frac{2(u+4)^2}{u}=68+u-\frac{2u^2+16u+32}{u}=52-\left(u+\frac{32}{u}\right).$$

小問 (i)：見える面積の最小値

H をできるだけ大きくしたいので、$u+\frac{32}{u}$ をできるだけ小さくすればよい。相加相乗平均の不等式（AM–GM inequality）により、$u>0$ のとき

$$u+\frac{32}{u}\ \geq\ 2\sqrt{32}=8\sqrt{2},$$

であり、等号が成り立つのはちょうど $u=\frac{32}{u}$、すなわち $u=4\sqrt{2}$ のときである。これは $[4,8]$ に含まれる（$4\sqrt{2}\approx 5.66$）ので許される。$p=8-u$ であるから、見える面積が最小になるのは見張りが次の位置にいるときである。

$$\boxed{p=8-4\sqrt{2}\ \approx 2.34\text{ 単位、起点は}A}$$

このとき見えない面積は $52-8\sqrt{2}$ であるから、見える面積は $76+8\sqrt{2}\approx 87.3$ 平方単位である。

小問 (ii)：見える面積の最大値

今度は H をできるだけ小さくしたいので、$[4,8]$ 上で $f(u)=u+\frac{32}{u}$ をできるだけ大きくすればよい。$f'(u)=1-\frac{32}{u^2}$ であるから、f は $[4,4\sqrt{2}]$ で減少し、$[4\sqrt{2},8]$ で増加する。よって最大値は端点でとる。

$$f(4)=4+8=12,\qquad f(8)=8+4=12,$$

であり、両者は等しい。したがって H は $u = 8$ と $u = 4$ の両方、すなわち $p = 0$ と $p = 4$ で最小値 $52 - 12 = 40$ をとる。見える面積が最大値 $128 - 40 = 88$ 平方単位となるのは、見張りが

$$\boxed{\text{点} A\ (p = 0) \text{ または点} E\ (p = 4)}$$

にいるときであり、AE 上の他の点ではそうならない。

検算

- $p = 0$ のときは影を手計算で求められる。半直線は壁と $(6, 12)$ および $(12, 6)$ で交わり、見えない六角形の面積は 40 となって $H(0)$ と一致する。
- $p = 4$ のとき、T を通る半直線は直線 $x = 4$ に沿ってまっすぐ上に伸び、やはり $H(4) = 40$ となる。両端点での値が等しいのはよい兆候であり、公式が偏っていないことを示している。
- 600×600 の格子上で、P からの視線が塔を通過するかどうかを調べて見えない点を数えた。$p = 8 - 4\sqrt{2}$ では 40.687 となり、$52 - 8\sqrt{2} = 40.686$ と比べてよく合う。$p = 1$ では 40.429 となり、$H(1) = \frac{283}{7} \approx 40.429$ と一致する。

よくある間違い

- かすめる点として T や Y ではなく Z を使ってしまう。左下から見ると、塔の輪郭は奥の角ではなく、2 つの角 T と Y によって決まる。
- 小問 (ii) で停留点（stationary point）にとどまってしまう。停留点で得られるのは見える面積の**最小値**であるから、最大値は端点から得なければならず、ここでは端点が 2 つある。

STEP のその先へ

これは、計算幾何学（computational geometry）で研究される**可視性**（visibility）の問題の小さな例である（「美術館問題」（art gallery problem）は、多角形の部屋のすべての点を見張るのに何人の見張りが必要かを問うものである）。最適化の段階は、解析学（analysis）の基本的な事実を示している。すなわち、閉区間（closed interval）上の連続関数（continuous function）は最大値と最小値をとり、それは停留点か端点のいずれかで実現される。これが最大値・最小値の定理（extreme value theorem）であり、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）で丁寧に証明されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。