解答例

STEP I 1991、第 3 問

純粋数学 • 複素等比級数

> **STEP I 1991、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q3

鍵となる考え方

複素数平面（Argand diagram）において、$re^{i\phi}$ を掛けることは、ベクトルを r 倍に拡大し、反時計回りに ϕ だけ回転させることである。経路の各線分は、直前の線分を同じ倍率で拡大し同じ角だけ回転させたものなので、各線分を表すベクトルは直前のものに一定の複素数を掛けたものになる。したがって線分は等比数列（geometric progression）をなし、それらを足し合わせればすべての頂点の位置が得られる。

解答

隣り合う線分の比

P_n から P_{n+1} へのベクトルは $z_{n+1} - z_n$ で表され、P_{n-1} から P_n へのベクトルは $z_n - z_{n-1}$ で表される。2 つの複素数の商では、絶対値（modulus）は割り算になり、偏角（argument）は引き算になる：

$$\left|\frac{z_{n+1}-z_n}{z_n-z_{n-1}}\right| = \frac{P_nP_{n+1}}{P_{n-1}P_n} = d, \qquad \arg\frac{z_{n+1}-z_n}{z_n-z_{n-1}} = \arg(z_{n+1}-z_n) - \arg(z_n-z_{n-1}) = \theta,$$

なぜなら、後の線分の長さは前の線分の d 倍であり、ある有向線分の向きから次の有向線分の向きへ反時計回りに測った角は θ だからである。（偏角は 2π の整数倍の差を除いてしか定まらないが、これは複素数そのものには影響しない。）よって、すべての $n \geq 2$ に対して

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{z_n-z_{n-1}} = d\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = d(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

z_{n+1} を表す式

$w = de^{i\theta}$ とおく。最初の線分は $z_2 - z_1 = 1$ であり、以後の各線分は直前の線分の w 倍であるから、数学的帰納法（induction）により

$$z_{k+1} - z_k = w^{k-1} \qquad (k \geq 1).$$

これらを $k = 1, 2, \ldots, n$ について足し合わせると、左辺は隣り合う項が打ち消し合って（telescoping）$z_{n+1} - z_1 = z_{n+1}$ となる：

$$z_{n+1} = 1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = \frac{w^n - 1}{w - 1} = \frac{d^n e^{in\theta} - 1}{de^{i\theta} - 1}.$$

この等比級数（geometric series）の和の公式を使うには $w \neq 1$ が必要であり、$|w| = d$ であるから、ここで $d \neq 1$ という条件が使われる。

$\theta = \frac{1}{3}\pi$、$d = 2$ の場合

このとき $w = 2e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}$ であるから、分母はとても簡単になり、$w - 1 = i\sqrt{3}$ である。$\frac{1}{i} = -i$ より

$$z_{n+1} = \frac{w^n - 1}{i\sqrt{3}} = -\frac{i}{\sqrt{3}}\left(2^n \cos\tfrac{n\pi}{3} - 1 + i\,2^n \sin\tfrac{n\pi}{3}\right),$$

したがって

$$\operatorname{Re} z_{n+1} = \frac{2^n \sin\frac{n\pi}{3}}{\sqrt{3}}, \qquad \operatorname{Im} z_{n+1} = \frac{1 - 2^n \cos\frac{n\pi}{3}}{\sqrt{3}}.$$

考えてみよう $\operatorname{Im} z_{n+1}$ の符号から、経路が実軸と交わることがどのようにわかるだろうか？

経路はつながっている。すなわち、線分が切れ目なく連なったものである。ある頂点が実軸より真に下にあり、それより後の頂点が実軸より真に上にある（あるいはその逆である）ならば、その間の経路は実軸と交わらなければならない。そこで、実軸の反対側にある頂点の組を、繰り返し見つけていけばよい。

$\cos\frac{n\pi}{3}$ の値は周期 6 で繰り返す。$k \geq 1$ を任意の整数とする。

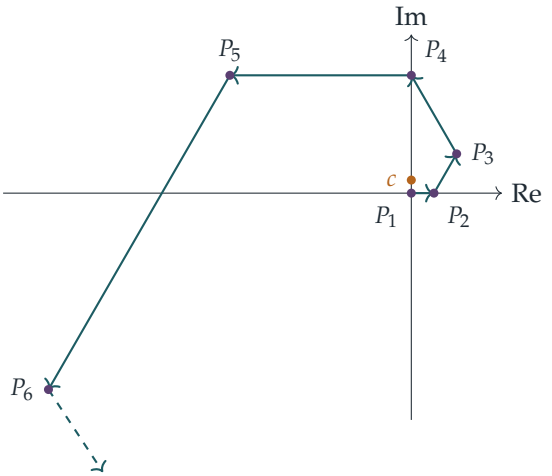
- $n = 6k$ のとき $\cos\frac{n\pi}{3} = \cos 2k\pi = 1$ であり、$2^{6k} > 1$ より $\operatorname{Im} z_{6k+1} = \dfrac{1 - 2^{6k}}{\sqrt{3}} < 0$ である。
- $n = 6k + 3$ のとき $\cos\frac{n\pi}{3} = \cos(2k\pi + \pi) = -1$ であり、$\operatorname{Im} z_{6k+4} = \dfrac{1 + 2^{6k+3}}{\sqrt{3}} > 0$ である。

よって、すべての $k \geq 1$ に対して、P_{6k+1} は実軸より下にあり、P_{6k+4} は実軸より上にある。したがって、各 $k = 1, 2, 3, \ldots$ について、P_{6k+1} から P_{6k+4} までの経路は実軸を下から上へ横切る。これらは k ごとに異なる経路の部分であるから、経路は実軸と無限回交わる。（同じ議論により、P_{6k+4} と P_{6k+7} の間では上から下へも横切る。）以上で証明が完了する。

実は、頂点は 3 つずつまとまって回っている。$\operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2, \ldots$ の符号の並びは $0, 0, +, +, +, -, -, -, +, +, +, \ldots$ である。これには見事な幾何学的理由がある。

$$z_{n+1} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} w^n,$$

と書くと、P_{n+1} は定点 $c = \mathrm{i}/\sqrt{3}$ から距離 $2^n/\sqrt{3}$ の位置にあり、1 ステップごとに c のまわりを $60°$ ずつ回転することがわかる。頂点は c のまわりの、1 ステップごとに大きさが 2 倍になる螺旋の上にあり、c は実軸のすぐ上にあるので、螺旋は実軸を繰り返し横切り続けるのである。



図には $P_1, \ldots, P_6$ を示した。次の頂点は $P_7 = -21\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ であり、はるか下方にある。経路は P_5P_6 上で初めて実軸と交わり、その後は実軸より下にとどまって、$P_8 = 64 - 21\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ から $P_9 = 128 + 43\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ への P_8P_9 上で下から上へ横切る。

検算

- 図形から直接求めると $z_3 = 1 + w = 2 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$ であり、公式からは $\operatorname{Im} z_3 = (1 - 4\cos\frac{2\pi}{3})/\sqrt{3} = 3/\sqrt{3} = \sqrt{3}$ が得られる。同様に、$w^2 = -2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ と $w^3 = -8$ を加えると $z_5 = -8 + 3\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ となり、$n = 4$ とした公式からは $\operatorname{Re} z_5 = 16\sin\frac{4\pi}{3}/\sqrt{3} = -8$、$\operatorname{Im} z_5 = (1 + 8)/\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ が得られる。

- $d = 1$ ならば頂点は正多角形の上に並び、経路は閉じる。等比級数の公式が使えなくなるのはまさにこの場合であり、そうなるべきである。
- 長さと回転角（d、θ と出発点は無作為に選んだ）から経路を数値的に構成し、比 $de^{i\theta}$、z_{n+1} の閉じた形の式、および $\theta = \frac{1}{3}\pi$、$d = 2$ の場合の上記の符号の並びを確認した。$z_1, \ldots, z_{41}$ の間で $\operatorname{Im} z$ の符号は 13 回変わる。

よくある間違い

- 比を $\frac{1}{d}e^{-i\theta}$ と書いてしまうこと。分子にあるのは**後の**線分であり、長さが d 倍で $+\theta$ だけ回転しているのはそちらである。
- 和で項数を 1 つずれて数えてしまうこと。P_1 から P_{n+1} までには n 本の線分があるので、級数は w^{n-1} までである。
- 実軸上にある頂点 1 つから交わると主張してしまうこと。実軸の**真に**反対側にある頂点が必要である（ここでは z_1 と z_2 が実軸上にあるので、$k \geq 1$ から始める）。

STEP のその先へ

規則 $z_{n+1} - z_n = w(z_n - z_{n-1})$ は線形漸化式（linear recurrence）であり、各頂点を次の頂点に移す写像 $z \mapsto c + w(z - c)$ は、その不動点（fixed point）c を中心とする**回転相似**（spiral similarity）、すなわち回転と拡大を組み合わせたものである。このような写像はメビウス変換（Möbius transformation）の最も簡単な例であり、これを繰り返し適用すると、貝殻に見られる等角螺旋（対数螺旋）が現れる。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、複素数の掛け算をこのように幾何学的に捉える考え方を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。