解答例

# STEP I 1991、第 2 問

純粋数学 ・ 変化率

> **STEP I 1991、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q2

## 鍵となる考え方

融解の法則を半径で書き直す。球では $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ であり、表面積もまた $4\pi r^2$ であるから、「体積が表面積に比例する速さで失われる」とは、単に半径が一定の速さで縮むということにほかならない。2 つの雪玉は比例定数を共有するので、どの時間についても両方の半径は同じだけ減少する。こうしてすべてが 1 変数、すなわち各半径の縮んだ量 $x$ の関数となる。

## 解答

### 半径は同じ一定の速さで縮む

雪玉の半径を $r$、体積を $V = \frac{4}{3}\pi r^3$、表面積を $S = 4\pi r^2$ とする。融解の法則は、両方の雪玉に共通の定数 $k > 0$ を用いて $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -kS$ と表される。合成関数の微分法（chain rule）により、

$$4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -k \cdot 4\pi r^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -k,$$

となる。ここで $4\pi r^2$ で割ったが、雪玉が存在している間（$r > 0$）はこれは正当である。よって時間 $t$ の後、各半径は同じ量 $x = kt$ だけ減少している。すなわち頭の半径は $2R - x$、胴の半径は $3R - x$ であり、これは $0 \le x \le 2R$ で成り立つ（$x = 2R$ で頭が消える）。

### 高さが半分のときの体積

頭は胴の上に載っているので、フロスティの高さは2つの直径の和である：

$$h = 2(2R - x) + 2(3R - x) = 10R - 4x.$$

最初は $h = 10R$ であるから、高さが半分とは $10R - 4x = 5R$、すなわち $x = \frac{5}{4}R$ のことである。これは $2R$ より小さいので頭はまだ残っており、このとき半径は $\frac{3}{4}R$ と $\frac{7}{4}R$ である。比をとると因子 $\frac{4}{3}\pi$ は約分されるので、

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{7}{4}\right)^3}{2^3 + 3^3} = \frac{(27 + 343)/64}{35} = \frac{370}{2240} = \frac{37}{224}.$$

したがって高さが半分になったとき、フロスティには元の体積のわずか $\frac{37}{224} \approx 0.165$ しか残っていない。体積は長さの3乗に比例して変わるのである。

### $\mathrm{d}V/\mathrm{d}S$ の最大値

$a = 2R - x$、$b = 3R - x$ とおく。$0 \le x < 2R$ において

$$V = \tfrac{4}{3}\pi(a^3 + b^3), \qquad S = 4\pi(a^2 + b^2),$$

であり、$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} = -1$ であるから

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -4\pi(a^2 + b^2), \qquad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -8\pi(a + b).$$

**考えてみよう** $V$ と $S$ はどちらも時間の（あるいは $x$ の）関数である。では $\mathrm{d}V/\mathrm{d}S$ とは何を意味するのか？

$x$ が増加すると $S$ は狭義単調減少する（$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} < 0$ だからである）ので、$V$ を $S$ の関数とみなすことができる。合成関数の微分法により $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \Big/ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} = \frac{a^2 + b^2}{2(a + b)}.$$

ここで、決して変化しない $b - a = R$ を利用する。$s = a + b = 5R - 2x$ とおく。すると $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}((a + b)^2 + (b - a)^2) = \frac{1}{2}(s^2 + R^2)$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} = \frac{s^2 + R^2}{4s} = \frac{s}{4} + \frac{R^2}{4s} = f(s), \text{ とおく.}$$

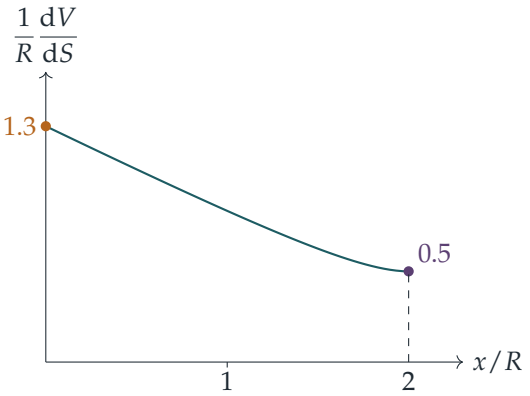
$x$ が 0 から $2R$ まで動くとき、$s$ は $5R$ から $R$ まで減少する。ここで

$$f'(s) = \frac{1}{4} - \frac{R^2}{4s^2} = \frac{s^2 - R^2}{4s^2} > 0 \quad \text{ただし} s > R,$$

であるから、$f$ は $[R,5R]$ で増加し、その最大値をとるのは $s=5R$、すなわち一番最初（$x=0$）である：

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S}\right)_{\max}=\frac{5R}{4}+\frac{R}{20}=\frac{13R}{10}.$$

（直接計算すると $\frac{4R^2+9R^2}{2\cdot 5R}=\frac{13}{10}R$ である。）その後この値は着実に減少し、頭が消える瞬間にちょうど $f(R)=\frac{1}{2}R$ となる。




## 検算

- 各雪玉について $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-kS$ を（$R=k=1$ として）逐次的に数値シミュレーションすると、$t\approx 1.25$ で高さが半分になり、そのときの体積比は 0.16518 であって、$\frac{37}{224}=0.165178\ldots$ と一致する。
- シミュレーションで得た $V$ と $S$ の差分商は、全区間で $\frac{a^2+b^2}{2(a+b)}$ と一致し、$1.3R$ を超えることはない。
- 単位：$\mathrm{d}V/\mathrm{d}S$ は体積を面積で割ったものなので長さであり、$\frac{13}{10}R$ も確かに長さである。

## よくある間違い

- 高さを直径の和ではなく半径の和としてしまう。（この問題ではたまたま $x$ は変わらないが、誤りである。）
- $\mathrm{d}V/\mathrm{d}S$ の代わりに $V/S$ を計算してしまう。1 つの球では $V/S=r/3$ であるが、$\mathrm{d}V/\mathrm{d}S=r/2$ である。
- 停留点（stationary point）を探してしまう。$f$ の極値をとる点は区間の端点 $s=R$ にあるので、最大値は区間のもう一方の端でとられる。

## STEP のその先へ

この問題の核心は、「表面積に比例する速さ」という法則が半径については一定の速さに変わるという点であり、幾何学によって微分方程式（differential equation）が自明なものになりうることの最初の例である。後半は媒介変数表示の微分、すなわち曲線 $(S(t), V(t))$ に沿った $\mathrm{d}V/\mathrm{d}S$ であり、閉区間上で最大値を求める際の注意点、つまり最大値が停留点ではなく端点でとられることがあるという点を扱っている。そのような最大値がなぜ必ず存在するのかについては、Bartle と Sherbert による *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）が説明している。微分方程式によるモデル化については、Boyce と DiPrima による *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。