解答例

STEP I 1991、第 16 問

確率・統計 ・ 条件付き確率

> **STEP I 1991、問 16**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q16

鍵となる考え方

それぞれの爬虫類が初めて道路を見てから $n = 0, 1, 2, \ldots$ 分後という確認時刻ごとに、すべてを整理する。ヒキガエルの待ち時間は幾何分布（geometric distribution）に従うので、彼女は確実に道路を渡る。カエルは事情が異なる。彼の規則では遅くとも $n = 3$ までに決断を迫られるので、彼の話は四つの段階しかなく、各段階で彼が無事に渡りきる確率を列挙できる。その一覧が得られれば、ヒキガエルとの比較も条件付き確率（conditional probability）も、いくつかの和を計算するだけである。

解答

以下を通して、異なる確認時刻における道路の状態は独立（independent）で、それぞれ確率 0.1 で安全であり、ヒキガエルとカエルは互いに独立に行動するものと仮定する。カエルは「後で」別の時刻に渡るのだから、これは妥当である。渡るのにかかる時間は無視できるので、確認時刻 n に渡り始めた爬虫類は時刻 n 分に到着する。

ヒキガエル

ヒキガエルは安全なときにしか渡らないので、轢かれることは決してない。確認時刻 $0, 1, \ldots, k$ の後もまだ待っている確率は 0.9^{k+1} であり、これは 0 に収束する。したがって、彼女が最終的に安全に渡る確率は

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0.9^k(0.1) = \frac{0.1}{1 - 0.9} = 1.$$

である。彼女が渡る時刻を T とおく。すると $P(T = k) = 0.9^k(0.1)$ であり、後で使うために記しておくと $P(T > k) = 0.9^{k+1}$ である。

カエル

確認時刻 n において、彼がまだ待っているとすると、

- 確率 0.1 で道路は安全であり、彼は安全に渡る。
- 確率 $0.9 \cdot \frac{n}{3}$ で道路は安全でないが、それでも彼は渡り始め、確率 0.2 で無事に到着し、確率 0.8 で轢かれる。
- 確率 $0.9\left(1-\frac{n}{3}\right)$ で彼は次の確認時刻まで待つ。

$n=0$ では彼は決して危険を冒さず、$n=3$ では安全でないときに渡り始める確率が 1 になるので、それまでに渡っていなければ $n=3$ で必ず渡り始める。特に、$n>3$ の場合は起こりえない。

確認時刻 n に彼がまだ待っている確率は

$$w_0=1, \quad w_1=0.9, \quad w_2=0.9\cdot 0.9\cdot \tfrac{2}{3}=0.54, \quad w_3=0.54\cdot 0.9\cdot \tfrac{1}{3}=0.162.$$

である。確認時刻 n に彼が無事に到着する確率は $w_n\left(0.1+0.9\cdot\frac{n}{3}\cdot 0.2\right) = w_n(0.1+0.06n)$ である。この確率を s_n と書くと、

$$s_0=1\times 0.1=0.1, \qquad s_1=0.9\times 0.16=0.144,$$
$$s_2=0.54\times 0.22=0.1188, \qquad s_3=0.162\times 0.28=0.04536.$$

よって

$$P(\text{カエルが安全に渡る})=0.1+0.144+0.1188+0.04536=\boxed{0.40816=\tfrac{2551}{6250}}.$$

彼が轢かれる確率は残りの $1-0.40816=0.59184$ である。

両者とも安全で、カエルのほうが速い場合

カエルが無事に到着する時刻を F とおく。両者が無事に到着し、かつ $F<T$ となる確率を求めればよい。ヒキガエルは確実に安全であり、独立性から

$$P(\text{カエルが時刻}n\text{ で安全に到着し、かつ}T>n)=s_n\,P(T>n)=s_n(0.9)^{n+1}.$$

考えてみよう なぜ $T\geq n$ ではなく $T>n$ なのか？

両者が同じ確認時刻 n に渡るなら、かかった時間は同じであり、カエルが真に速いとはいえない。したがって、ヒキガエルは時刻 n の確認の後もまだ待っていなければならず、その確率は 0.9^{n+1} である。カエルのありうる四つの時刻について和をとると、

$$\begin{aligned} P &= 0.1(0.9)+0.144(0.81)+0.1188(0.729)+0.04536(0.6561)\\ &= 0.09+0.11664+0.0866052+0.029760696\\ &= 0.323005896\approx \boxed{0.323}. \end{aligned}$$

厳密な分数で表すと $\frac{40375737}{125000000}$ である。

最後の小問

カエルが最初の確認から 2 分後の時点で向こう側に到着していないという事象を A、彼が轢かれるという事象を R とおく。渡るのは一瞬なので、$n=2$ の確認時刻に無事に渡ったカエルは 2 分の時点で到着**している**。したがって A は「$n=0$、1、2 のいずれかで安全に到着する」の補事象（complement）である：

$$P(A) = 1 - (s_0 + s_1 + s_2) = 1 - 0.3628 = 0.6372.$$

轢かれたカエルはどの時刻にも決して到着しないので、$R \subseteq A$ であり $P(R \cap A) = P(R) = 0.59184$ である。よって

$$P(R \mid A) = \frac{0.59184}{0.6372} = \frac{59184}{63720} = \boxed{\frac{274}{295} \approx 0.929}.$$

これには、すでに（$n=1$ または $n=2$ で）轢かれたカエルと、まだ待っていてその後 $n=3$ で轢かれるカエルの両方が含まれており、「どこかの段階で」という条件のとおりである。

（この条件を、$n=0$ と $n=1$ の確認の後、すなわち $n=2$ の確認の**前**に到着していないという意味に解釈する読者もいるだろう。その解釈では $0.59184/(1-0.244) = \frac{137}{175} \approx 0.783$ となる。ちょうど 2 分での到着は、彼が出発してから「2 分後」の到着であるから、本書では上の解釈を採る。）

検算

- カエルの結果はすべての場合を尽くしていなければならない。$n=1,2,3$ で轢かれる確率は 0.9(0.24)、0.54(0.48)、0.162(0.72)、すなわち $0.216+0.2592+0.11664 = 0.59184$ であり、これはちょうど $1-0.40816$ に等しい。
- カエルが安全に渡る確率は、ヒキガエルの確実な 1 よりかなり小さい。せっかちなほうなのだから、そうあるべきである。
- 分数による厳密な数え上げと、10^6 組の爬虫類によるモンテカルロ・シミュレーション（Monte Carlo simulation）を行ったところ 0.4087、0.3234、0.9286 が得られ、0.40816、0.32301、0.92881 と一致した。

よくある間違い

- $n=0$ でカエルに危険を冒させてしまう。そこでは規則により $n/3 = 0$ である。

- カエルの過程が $n = 3$ で終わることを忘れ、ヒキガエルと同じように彼についても幾何級数を足してしまう。
- 最後の小問で、P(安全に到着していない、$n \leq 2$) で割っているのに、分子には $n = 2$ までに轢かれる場合しか入れない。問題が尋ねているのは $n = 3$ を含め、どこかの段階で轢かれることである。

STEP のその先へ

カエルの道のりは、吸収状態（absorbing state）（「安全」と「轢かれる」）をもつ小さな**マルコフ連鎖**（Markov chain）であり、ヒキガエルの待ち時間は幾何分布、すなわち無記憶性をもつ指数分布（exponential distribution）の離散版である。マルコフ連鎖の吸収確率と到達時間（hitting time）は、最初の確率論の講義の中心的な話題である。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、その両方を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。