解答例

STEP I 1991、第 14 問

確率・統計 ・ 三角形の数え上げ

> **STEP I 1991、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q14

鍵となる考え方

3 つの長さ $a > b > c$ が退化しない三角形（non-degenerate triangle）をなすのは、最も長い辺が他の 2 辺の和より真に短いとき、すなわち $b + c > a$ のときであり、かつそのときに限る。残りの 2 つの三角不等式（triangle inequality）は自動的に成り立つ。そこで a を固定し、各 b について $a - b$ と b の間に収まる c の値の個数を数える。この個数は 2 ずつ増えていくので、奇数（または偶数）の和が現れるのである。さらにあらゆる a について足し合わせるには、$\sum k^2$ のよく知られた公式だけがあればよい。

解答

三角形が存在するのはどのようなときか

$a > b > c > 0$ とする。退化しない三角形のための 3 つの三角不等式は

$$b + c > a, \qquad a + c > b, \qquad a + b > c.$$

である。後の 2 つは、a がすでに b よりも c よりも大きいので自動的に成り立つ。したがって、3 本の棒が退化しない三角形をなすための必要十分条件は $b + c > a$ である。（$b + c = a$ のとき「三角形」はつぶれて面積が 0 になるので、除外する。）

最も長い棒の長さが偶数の場合

a を固定する。次を満たす整数 b, c が必要である。

$$a - b < c < b, \qquad b < a.$$

与えられた b に対し、$a-b+1 \le c \le b-1$ を満たす整数 c の個数は

$$(b-1)-(a-b+1)+1 = 2b-a-1,$$

である。ただしこれが正の場合であり、そうでなければ c は存在しない。（ここで $c \ge a-b+1 \ge 2$ であるから、c は自動的に実際の棒の長さとなることに注意する。）

いま a を偶数とする。このとき $2b-a-1$ は奇数であり、これが 1 以上となるのは $b \ge \frac{a}{2}+1$ のときであり、かつそのときに限る。よって b は $\frac{a}{2}+1$ から $a-1$ まで動き、

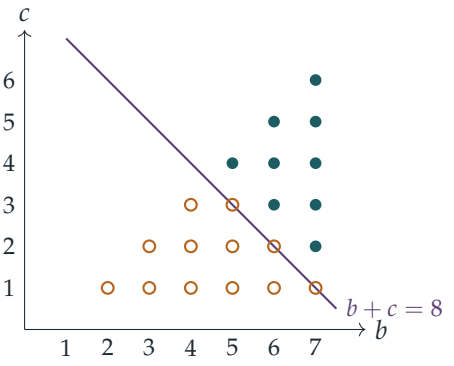
$$\begin{aligned} b = \tfrac{a}{2}+1 &: \quad 2b-a-1 = 1, \\ b = \tfrac{a}{2}+2 &: \quad 2b-a-1 = 3, \\ &\vdots \\ b = a-1 &: \quad 2b-a-1 = a-3. \end{aligned}$$

となる。b が 1 増えるごとに個数は 2 ずつ増えるので、この長さを最も長い棒とする三角形の個数は

$$1+3+5+\cdots+(a-3),$$

であり、これが示すべきことであった。（$a=2$ のときこの和は空和となるが、これは正しい。最長辺が 2 の三角形は存在しない。）最初の k 個の奇数の和は k^2 であり、ここでは項数が $\frac{a-2}{2}$ であるから、この個数は $(\frac{a-2}{2})^2$ である。

下の図は $a=8$ の場合を示している。各点は $8>b>c$ を満たす組 (b,c) であり、塗りつぶした点は直線 $b+c=8$ より上にあるものである。各列には塗りつぶした点がそれぞれ 1 個、3 個、5 個含まれる。



最も長い棒の長さが奇数の場合

次に a を奇数とする。このとき $2b-a-1$ は偶数であり、これが正となるのは $b \ge \frac{a+3}{2}$ のときであり、かつそのときに限る。b が $\frac{a+3}{2}$ から $a-1$ まで動くとき、個数は

$2,4,\dots,a-3$ となるので、三角形の個数は

$$2+4+6+\cdots+(a-3)=2\Big(1+2+\cdots+\tfrac{a-3}{2}\Big)=\frac{a-3}{2}\cdot\frac{a-1}{2}=\frac{(a-1)(a-3)}{4}.$$

である。（この場合も $a=3$ のとき正しく 0 となる。）

三角形の総数

最も長い棒は $3,4,\dots,2N+1$ のいずれでもありうる（それより小さい値ではいずれにせよ 0 個である）。

偶数の $a=2m$（$m=1,\dots,N$）のとき、個数は $(m-1)^2$ であるから、これらの寄与は

$$\sum_{m=1}^{N}(m-1)^2=\sum_{k=1}^{N-1}k^2=\frac{(N-1)N(2N-1)}{6}.$$

である。

奇数の $a=2m+1$（$m=1,\dots,N$）のとき、個数は $\frac{(2m)(2m-2)}{4}=m(m-1)$ であるから、これらの寄与は

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{N}(m^2-m)&=\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}-\frac{N(N+1)}{2}\\&=\frac{N(N+1)(2N-2)}{6}=\frac{(N-1)N(N+1)}{3}.\end{aligned}$$

である。

これらを足し合わせると、退化しない三角形をなす選び方の総数は

$$T_N=\frac{N(N-1)}{6}\big[(2N-1)+2(N+1)\big]=\frac{N(N-1)(4N+1)}{6}.$$

である。

> **考えてみよう** 1 つの公式をそのまま足し合わせるのではなく、a の偶奇で和を分けるのはなぜか。

与えられた a に対する個数は、a が偶数のときは $\frac{(a-2)^2}{4}$ であるが、a が奇数のときは $\frac{(a-1)(a-3)}{4}=\frac{(a-2)^2-1}{4}$ である。これらは a の異なる多項式であるから、$a=2m$ または $a=2m+1$ とおくことで、それぞれを標準的な公式で和をとれる m の簡単な多項式に直すのである。

$N=3$ の場合の確認

公式から $T_3=\frac{3\cdot2\cdot13}{6}=13$ が得られる。棒 $1,\dots,7$ で直接書き出し、三角形を (a,b,c) と表すと次のようになる。

- $a = 4$（1 個）：$(4,3,2)$
- $a = 5$（2 個）：$(5,4,2)$、$(5,4,3)$
- $a = 6$（4 個）：$(6,4,3)$、$(6,5,2)$、$(6,5,3)$、$(6,5,4)$
- $a = 7$（6 個）：$(7,5,3)$、$(7,5,4)$、$(7,6,2)$、$(7,6,3)$、$(7,6,4)$、$(7,6,5)$

これで $1+2+4+6 = 13$ 個の三角形となり、公式と一致する（さらに偶数の a については $1 = 1^2$、$4 = 2^2$、奇数の a については $2 = 2\cdot 1$、$6 = 3\cdot 2$ とも一致する）。

確率

3 本の棒を無作為に非復元抽出（without replacement）で取り出すとき、$\binom{2N+1}{3}$ 通りの順序を区別しない選び方はどれも同様に確からしい。

$$\binom{2N+1}{3} = \frac{(2N+1)(2N)(2N-1)}{6},$$

であるから、退化しない三角形ができる確率（probability）は

$$\frac{T_N}{\binom{2N+1}{3}} = \frac{N(N-1)(4N+1)}{(2N+1)\,2N\,(2N-1)} = \frac{(N-1)(4N+1)}{2(4N^2-1)},$$

となる。ここで因数 N を約分し、$(2N+1)(2N-1) = 4N^2-1$ を用いた。これが求める結果である。

検算

- $N = 3$ のとき確率は $\frac{2\cdot 13}{2\cdot 35} = \frac{13}{35}$ であり、$\binom{7}{3} = 35$ 通りの選び方のうち 13 個が三角形であることと一致する。
- $N \to \infty$ のとき確率は $\frac{4N^2}{8N^2} = \frac{1}{2}$ に収束する。これは連続版と一致する。すなわち、$[0,1]$ 上の一様分布に従う 3 つの独立な長さについて、最大のものが他の 2 つの和より小さい確率は $\frac{1}{2}$ である。
- 2 から 29 までのすべての N について、あらゆる 3 つ組を総当たりで数えた結果は、T_N とも確率の公式とも完全に一致した。

よくある間違い

- $b + c \geq a$ を用いてしまう。等号の場合はつぶれた三角形となり、問題ではこれを除外しているので、どの個数も大きくなりすぎる。

- 3 つの三角不等式をすべて個別に確かめてしまう、あるいは a が最大であれば $b+c>a$ だけが問題になることを見落とす。
- b の範囲を 1 つずれて取ってしまう。$a=6$ のような小さな場合で確かめるとよい（三角形は $(6,4,3)$、$(6,5,2)$、$(6,5,3)$、$(6,5,4)$、すなわち $1+3$ 個）。

STEP のその先へ

図のように領域内の格子点（lattice point）を数えることは、面積を計算することの離散版であり、N が大きくなると、個数を $\binom{2N+1}{3}$ で割った値は単位立方体における体積比に近づく。このような離散一様分布から連続一様分布への移行や、折れた棒の問題（broken-stick problem）のような「幾何確率（geometric probability）」の問題は、大学 1 年次の古典的な題材である。さらに学ぶには、Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。