解答例

STEP I 1991、第 13 問

力学 ・ 運動量保存則

> **STEP I 1991、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q13

鍵となる考え方

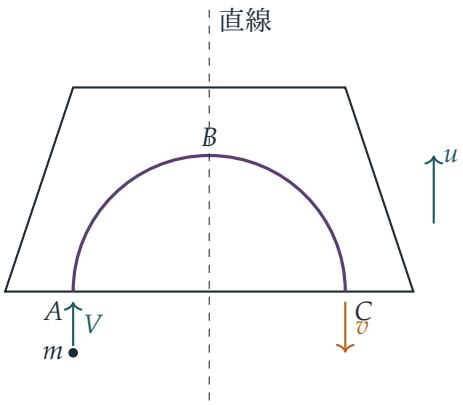
台はなめらかで溝もなめらかなので、系の外部から直線方向に押す力はなく、またどの力も仕事をしない。したがって、直線方向の運動量（momentum）と運動エネルギー（kinetic energy）という二つの保存則が得られる。出口での溝の接線（tangent）は直線に平行なので、出口では**両方**の速度が直線方向を向き、二つの保存則は一次元の弾性衝突（elastic collision）とまったく同じように働く。固定された薄板（lamina）については、平均の力は単に力積（impulse）の総和をかかった時間で割ったものである。

問題文の表現について一言述べておく。問題文では A と B における接線が直線に平行であるとしているが、図を見ると直線に平行なのは両端 A と C における接線である（B では溝は直線に垂直である）。ここでは、明らかに意図されている A と C を用いる。

解答

動く薄板

粒子を質点（point mass）、薄板を直線方向にのみ並進できる剛体（rigid body）とみなし、すべての接触はなめらかであるとする。直線を座標軸にとり、粒子が A から入るときの運動の向きを正の向きとする。



粒子が C から直線方向の速度 v（V の向きを正とする）で出ていき、そのとき薄板の直線方向の速度が u であるとする。

考えてみよう C における粒子の速度は、なぜ直線方向を向いていなければならないのか。

薄板に対して粒子は溝に沿って動くので、C における相対速度はそこでの接線方向、すなわち直線に平行な方向を向く。薄板自身は直線方向にしか動かない。この二つを合成すると、C における粒子の実際の速度もまた直線方向を向く。したがって出口では、それぞれの物体について一つの数だけを考えればよい。

運動の間、系（粒子と薄板）に外部から働く力は、鉛直方向を向く台からの垂直抗力（normal reaction）と、薄板を直線上に保つ力であり、後者は直線に垂直である（直線はなめらかである）。溝が粒子に及ぼす力と粒子が溝に及ぼす力は内力（internal force）であり、対になって打ち消し合う。よって直線方向の運動量は保存される：

$$mV = mv + Mu. \tag{1}$$

すべての接触はなめらかで台は水平なので、仕事はなされず、運動エネルギーは保存される。（溝の垂直抗力は粒子と薄板それぞれに対しては仕事をするが、抗力は**相対速度**に垂直なので、その二つの量は打ち消し合う。）よって

$$\tfrac{1}{2}mV^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}Mu^2. \tag{2}$$

(1) と (2) を次のように書き直す。

$$m(V - v) = Mu, \qquad m(V - v)(V + v) = Mu^2.$$

一つの解は $v = V, u = 0$ であるが、これは何も起こる前の A における状況である。C では粒子は薄板に対して**逆向き**に動いているので、$v \neq V$ かつ $u \neq 0$ であり、第 2 式を第 1 式で割って次を得る。

$$V + v = u.$$

（これは、薄板に対する粒子の相対速さが両端でともに V であることを意味しており、ちょうど弾性衝突の場合と同じである。）$u = V + v$ を (1) に代入すると

$$mV = mv + MV + Mv \quad \Longrightarrow \quad v = -\frac{M-m}{M+m}V, \qquad u = V + v = \frac{2m}{M+m}V.$$

$m < M$ なので v は負である。すなわち、粒子は来た向きへ戻るように C から出ていく。よって粒子が溝を離れるとき

$$\text{粒子の速さ} = \frac{M-m}{M+m}V, \qquad \text{薄板の速さ} = \frac{2m}{M+m}V,$$

であり、薄板は粒子のもとの運動の向きに動き、粒子はその反対向きに動く。

粒子は確かに溝を回り切る。もし粒子が薄板に対して静止する点があれば、そこでは粒子は薄板と同じ速度をもち、運動エネルギーは $\frac{1}{2}(mV)^2/(M+m) < \frac{1}{2}mV^2$ となるが、これはエネルギー保存則に反する。したがって相対速さがゼロになることはない。

薄板を固定した場合

今度は薄板は動けない。溝が粒子に及ぼす抗力は粒子の速度に垂直なので仕事をせず、粒子は一定の速さ V で半円を回る。半円の長さは πr なので、溝の中にいる時間は

$$T = \frac{\pi r}{V}.$$

粒子の運動量は前向きの mV から後ろ向きの mV に変わるので、薄板が粒子に与える力積の総和は直線に沿って後ろ向きに $2mV$ である。直線に垂直な方向の運動量は両端でともにゼロなので、力積の垂直成分はゼロである。

ニュートン（Newton）の第三法則（third law）により、粒子は薄板に直線に沿って前向きに $2mV$ の力積を与える。薄板は静止したままなので、留め金（peg）が逆向きの力積を与えなければならず、薄板は留め金を、粒子のもとの運動の向きに総力積 $2mV$ で押す。（前段落より、直線からの横向きの押す力は平均するとゼロになる。）T で割ると、留め金に働く平均の力は

$$\frac{2mV}{\pi r/V} = \frac{2mV^2}{\pi r},$$

であり、その向きは粒子が溝に入ったときの向きである。（問題文の「単位時間あたりの平均の力」とは、まさにこれ、すなわち単位時間あたりの力積を意味する。）

このことは直接確かめることもできる。粒子には中心向きに mV^2/r の力が必要なので、粒子は薄板を外向きに mV^2/r で押す。粒子への半径が CA となす角を θ とすると（θ は一定の割合で 0 から π まで動く）、この押す力の直線方向の成分は $(mV^2/r)\sin\theta$ であり、$[0, \pi]$ における $\sin\theta$ の平均は $2/\pi$ である。

検算

- $M \to \infty$ のとき、薄板はほとんど動かない。$u \to 0$ となり、粒子の速さは固定された溝の場合と同様に V に近づく。
- $m = M$ のとき、粒子は静止して出てきて、薄板が速さ V をすべて受け取る。これは等しい質量どうしの弾性衝突と同じである。
- $M = 3, m = 1, V = 2$ のとき、$v = -1, u = 1$ である。運動量：$1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 2 = mV$。エネルギー：$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2$。運動方程式の数値シミュレーション（半円形の溝と半楕円形の溝について）でも小数点以下 6 桁まで同じ値が得られ、固定された薄板について $(mV^2/r)\sin\theta$ を数値積分すると平均の力 $2mV^2/(\pi r)$ が得られた。たとえば $m = 0.7, r = 1.3, V = 2.1$ のとき 1.5117 である。

よくある間違い

- 解 $v = V, u = 0$ を残してしまう。これは両方の式を満たすが、出口ではなく入口の瞬間を表している。
- 直線方向の平均の力ではなく、最大の力 mV^2/r を用いてしまう。横向きの成分は打ち消し合い、直線方向の成分が mV^2/r に達するのは B においてのみである。

STEP のその先へ

前半は隠れた衝突である。溝の形がどうであれ、重要なのは保存量と出口での向きだけである。これは、力を知らなくても保存則によって散乱（scattering）の問題を扱うという考え方の根底にあるものである。ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）では、直線方向の座標はラグランジアン（Lagrangian）に現れないので、その共役運動量（conjugate momentum）は自動的に保存される。これが対称性と保存則の結びつき（ネーター（Noether）の定理）の出発点である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、運動量、力積、衝突をこの精神で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。