解答例

STEP I 1991、第 12 問

力学 ・ 摩擦のあるつり合い

> **STEP I 1991、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q12

鍵となる考え方

板 AB は軽く、力を受けるのは両端の滑らかな蝶番（smooth hinge）からだけである。したがって、AB が CD に及ぼす力は AB に沿った向きにはたらかなければならない。これにより、問題は 1 つの剛体（rigid body）CD と 3 つの未知の力の問題に帰着する。C のまわりの力のモーメント（moment）を考えると AB の推力（thrust）が求まり、続いて力を分解すると C における摩擦力（friction）と垂直抗力（normal reaction）が求まる。幾何的な条件（2 枚の板が B で接すること）によって x が α と β に結びつけられ、これによって答えから l と x が消えるのである。

解答

モデル化

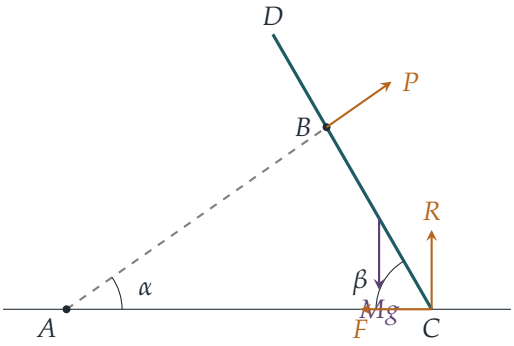
板は重さのない剛体の棒、塗装職人は質量 M の質点（particle）、A と B の蝶番は滑らかであるとみなす。地面は C において粗く、その摩擦係数（coefficient of friction）は μ である。

> ? **考えてみよう** B において板どうしの間にはたらく力は、なぜ AB に沿った向きでなければならないのか。

板 AB には重さがなく、これにはたらく力は A と B の滑らかな蝶番からの力だけである。A のまわりのモーメントを考えると、B における力は A のまわりのモーメントをもたないので、BA に沿った向きにはたらく。すると A における力は、これと大きさが等しく向きが反対でなければならない。ニュートン（Newton）の第 3 法則により、

AB は B において CD を AB に沿った力 P で押す。P の向きを A から B への向き（推力）にとると、計算の結果 $P > 0$ であることが確かめられる。

よって CD にはたらく力は次のとおりである。B における推力 P（水平から角 α だけ上向きで、A から遠ざかる向き）、板に沿って C から距離 x の位置にはたらく塗装職人の重力 Mg、そして C における上向きの垂直抗力 R と A に向かう向きの摩擦力 F である。推力が C を A から遠ざける向きに押すので、摩擦力は A に向かう向きでなければならない。



幾何的な条件

点 B は AB の上端であるから、その高さは $2l\sin\alpha$ である。また B は CD に沿って C から距離 $2x$ の位置にあるので、その高さは $2x\sin\beta$ でもある。したがって

$$x\sin\beta = l\sin\alpha, \qquad \text{すなわち} \qquad x = \frac{l\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

水平距離 AC は、AB と BC の水平方向への射影の和である。

$$AC = 2l\cos\alpha + 2x\cos\beta.$$

CD についてのモーメントと力の分解

C のまわりのモーメントを考える。P の作用線（line of action）は直線 AB であり、C からこの直線までの距離は $AC\sin\alpha$ である。重力は C から水平距離 $x\cos\beta$ の位置にはたらく。2 つのモーメントは互いに逆向きであるから

$$P\cdot AC\sin\alpha = Mg\,x\cos\beta \quad\Longrightarrow\quad P = \frac{Mg\,x\cos\beta}{(2l\cos\alpha + 2x\cos\beta)\sin\alpha} > 0.$$

水平方向と鉛直方向に分解すると

$$F = P\cos\alpha, \qquad R = Mg - P\sin\alpha.$$

P を代入すると

$$R = Mg\left(1 - \frac{x\cos\beta}{2l\cos\alpha + 2x\cos\beta}\right) = Mg\,\frac{2l\cos\alpha + x\cos\beta}{2l\cos\alpha + 2x\cos\beta},$$
$$F = Mg\,\frac{x\cos\beta\cos\alpha}{(2l\cos\alpha + 2x\cos\beta)\sin\alpha}.$$

特に $R > 0$ であるから、端 C は地面から離れない。両者の比をとると

$$\frac{F}{R} = \frac{x\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\,(2l\cos\alpha + x\cos\beta)}.$$

ここで幾何的な条件 $x = l\sin\alpha/\sin\beta$ を用いる。すると $x\cos\beta = l\sin\alpha\cot\beta$ となり、

$$\frac{F}{R} = \frac{l\sin\alpha\cot\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\,(2l\cos\alpha + l\sin\alpha\cot\beta)} = \frac{\cos\alpha\cot\beta}{2\cos\alpha + \sin\alpha\cot\beta} = \frac{\cot\alpha\cot\beta}{2\cot\alpha + \cot\beta},$$

である。ただし最後の変形では分子と分母を $\sin\alpha$ で割った。

板 CD が釣り合う（equilibrium）のは、摩擦力がこの大きさの力を与えられるとき、すなわち $F \le \mu R$ のときに限る。$R > 0$ であるから、これは

$$\mu \ge \frac{\cot\alpha\cot\beta}{2\cot\alpha + \cot\beta},$$

となり、示すべき式が得られた。（板 AB は A で蝶番により固定されているので、必要な力がどのようなものであっても位置が保たれる。）

最後の設問

B が D と一致するならば $2x = 2l$ であるから $x = l$ である。幾何的な条件から $\sin\beta = \sin\alpha$ となり、両方の角は鋭角であるから $\beta = \alpha$ である。2 枚の板と地面は二等辺三角形（isosceles triangle）をなし、$AC = 4l\cos\alpha$ である。摩擦の条件は

$$\mu \ge \frac{\cot^2\alpha}{3\cot\alpha} = \tfrac{1}{3}\cot\alpha, \qquad \text{すなわち} \qquad \tan\alpha \ge \frac{1}{3\mu}.$$

となる。よって釣り合いが可能であるのは、$\tan\alpha_0 = 1/(3\mu)$ として $\alpha \ge \alpha_0$ のときであり、かつそのときに限る。

考えてみよう 塗装職人はどこにいるか。また、α が変化するとき、距離はどちらの向きに変化するか。

塗装職人は CD の中点、すなわち C から距離 l の位置に立っている。A を原点にとると、C は $(4l\cos\alpha, 0)$ にあり、塗装職人の位置は

$$(4l\cos\alpha - l\cos\alpha,\ l\sin\alpha) = (3l\cos\alpha,\ l\sin\alpha).$$

である。よって塗装職人と A との距離の 2 乗は

$$d^2 = 9l^2\cos^2\alpha + l^2\sin^2\alpha = l^2\left(1 + 8\cos^2\alpha\right).$$

である。これは $(0, \frac{\pi}{2})$ において α が増加すると減少する。したがって距離が最大となるのは許される最小の角 $\alpha = \alpha_0$ のときである。このとき $\tan\alpha_0 = 1/(3\mu)$ であるから

$$\cos^2\alpha_0 = \frac{1}{1+\tan^2\alpha_0} = \frac{9\mu^2}{1+9\mu^2},$$

であり、

$$d^2_{\max} = l^2\left(1 + \frac{72\mu^2}{1+9\mu^2}\right) = l^2\,\frac{1+81\mu^2}{1+9\mu^2}.$$

となる。以上より、塗装職人と A との距離の最大値は

$$l\sqrt{\frac{1+81\mu^2}{1+9\mu^2}},$$

であり、示すべき結果が得られた。この値は摩擦がちょうど限界状態 (limiting friction) にあるときに実際に達成される。

検算

- 最終的な答えの極限の場合：$\mu \to 0$ のとき距離は l に近づき、これは $\alpha \to \frac{\pi}{2}$、すなわち両方の板が鉛直になる場合に対応する。$\mu \to \infty$ のとき距離は $3l$ に近づき、これは板が地面に平らに横たわり、塗装職人が $(3l, 0)$ にいる場合に対応する。どちらも妥当である。
- $\beta \to \frac{\pi}{2}$、すなわち CD が鉛直になる場合、$\cot\beta \to 0$ となり、必要な μ は 0 に近づく。鉛直な板には摩擦が不要であるから、これは整合する。
- 数値的に、$\alpha = 60°$、$\beta = 70°$ として CD についての 3 つの釣り合いの式を直接解くと $F/R = 0.13837$ となり、公式と一致する。$\mu = 0.5$ として α を走査すると距離の最大値は $2.55704\,l$ となり、公式からも $l\sqrt{21.25/3.25} = 2.55704\,l$ が得られる。

よくある間違い

- B における力が水平または鉛直であると仮定してしまうこと。AB は軽く、両端が滑らかな蝶番でつながれているので、力は AB に沿った向きでなければならない。
- R において推力の鉛直成分を忘れること。この成分は垂直抗力を減らし、その結果として摩擦力を与えにくくする。
- 最後の設問で、釣り合いが可能な角だけでなく、すべての α にわたって最大化してしまうこと。

STEP のその先へ

両端に滑らかなピンをもつ軽い棒は**二力部材**（two-force member）とよばれる。これを見抜くことは、工学の静力学においてピン接合された骨組み構造（トラス、truss）を解析するための第一歩であり、そこではこのような各部材が純粋な張力または推力を受け持つ。最後の設問は小さな制約付き最適化（constrained optimisation）の問題である。目的関数が単調（monotonic）であるので、最適値は実行可能領域（feasible set）の境界上でとられる。これは線形計画法（linear programming）や最適化の分野全体で繰り返し現れるテーマである。剛体の釣り合いについてさらに学ぶには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。