解答例

STEP I 1991、第 11 問

力学 ・ 滑車と力積

> **STEP I 1991、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q11

鍵となる考え方

各周期は 2 つの段階からなる。おもりが杭に当たると、おもりはその場で静止し、糸はたるむ。そのため釣り合いおもりは上へ飛び上がり、重力のみを受けて自由に落ちてくる。次に糸がぴんと張り、2 つの質点は運動量を分け合う。その後は、おもりが再び杭に着くまで、最初の小問で求めた一定の加速度で一緒に運動する。加速度が一定であるため、どちらの段階も時間について対称になる。したがって、1 つの周期におけるすべての速さは、直前の周期における速さの一定倍となり、ただちに等比数列が得られる。

解答

一定の加速度

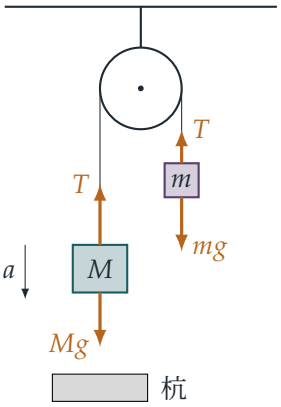
おもりと釣り合いおもり（counterweight）を質点とみなし、糸は軽くて伸び縮みしない（inextensible）もので、滑らかで軽い滑車（smooth pulley）にかけられているとする。糸が張っている間、2 つの質点は同じ速さ v で運動し、おもりは下へ、釣り合いおもりは上へ動く。静止状態から距離 x だけ動いたとき、速さが v になったとする。おもりは位置エネルギー（potential energy）Mgx を失い、釣り合いおもりは mgx を得る。滑車は滑らかで、糸は軽く伸び縮みしないので、エネルギーは失われず、

$$\tfrac{1}{2}(M+m)v^2 = (M-m)gx.$$

これを時間で微分し、$\dot{x} = v$ を用いると、$v \neq 0$ のとき

$$(M+m)v\dot{v} = (M-m)gv \quad \Longrightarrow \quad \dot{v} = g\,\frac{M-m}{M+m}$$

となる。これは定数である。これを a とおく。同じ結果はニュートン（Newton）の運動の第 2 法則からも得られる。張力（tension）を T とすると、$Mg - T = Ma$ かつ $T - mg = ma$ であり、これらを足すと $(M - m)g = (M + m)a$ となる。



ある衝突から次の衝突まで

衝突の直前、おもりは速さ v で下向きに、釣り合いおもりは同じ速さ v で上向きに運動している。この運動を 3 つの段階に分けて追っていく。

衝突。衝突は完全非弾性（completely inelastic）であり、杭（pile）は固定されているので、おもりは静止する。釣り合いおもりはなお速さ v で上向きに運動しているので、糸はたるむ。すると張力は釣り合いおもりに作用できず、重力だけがおもりを杭に押しつけるので、おもりはその場にとどまる。

自由飛行。糸がたるんでいる間、釣り合いおもりは鉛直方向に運動する放物体（projectile）である。それは上昇したのち、糸が再び張る点、すなわち衝突時にいた点に戻ってくる。一定の加速度 g のもとでは運動は対称であるから、釣り合いおもりはその点に速さ v で**下向き**に到達する。それまでにかかる時間は

$$\frac{2v}{g}.$$

糸が張る瞬間。釣り合いおもりが速さ v で下向きに運動し、おもりが静止している状態で、糸が急にぴんと張る。その後、2 つの質点は共通の速さ u で、釣り合いおもりは下向きに、おもりは上向きに運動しなければならない。与えられた仮定により、釣り合いおもりが失う運動量（momentum）は、おもりが得る運動量に等しい：

$$m(v - u) = Mu \quad \Longrightarrow \quad u = \frac{mv}{M + m}.$$

考えてみよう なぜここで系全体について運動量保存則をそのまま用いることができないのだろうか？

2 つの質点は互いに逆向きに運動しており、さらに滑車が力積（impulse）を及ぼすので、全運動量が保存されるような単一の方向は存在しない。正しいのは、糸が軽く滑車が滑らかであるため、撃力的な張力が両方の質点に同じ大きさ J で作用するということである。したがって、釣り合いおもりは糸に沿って運動量 J を失い、おもりは糸に沿って運動量 J を得る。これこそが、仮定してよいとされていた主張にほかならない。

再び一緒に。 ここで糸は張っており、おもりは速さ u で上向きに運動している。最初の小問により、加速度の大きさは一定値 a で、その向きは重いほうの質点 M が下がる向きである。したがって、おもりは減速して静止し、その後杭へ落ちて戻る。加速度が一定なので、この運動も対称である。おもりは速さ u で杭に到達し、それまでにかかる時間は

$$\frac{2u}{a}.$$

よって、次の衝突の直前に釣り合いおもりが運動する速さは

$$u = \frac{mv}{M+m},$$

となり、題意が示された。

時間は等比数列をなす

$k = \dfrac{m}{M+m}$ とおくと、$0 < k < 1$ である。最初の衝突の直前の速さを v_0 とする。前の小問により、$(n+1)$ 回目の衝突の直前の速さは $v_n = k^n v_0$ である。2 つの段階を合わせると、$(n+1)$ 回目の衝突から次の衝突までの時間は

$$t_n = \frac{2v_n}{g} + \frac{2kv_n}{a} = \left(\frac{2}{g} + \frac{2k}{a}\right) k^n v_0.$$

これは定数と k^n の積であるから、連続する衝突の間の時間は公比（common ratio）$k = m/(M+m)$ の等比数列（geometric progression）をなす。

全体の時間

手を放してから最初の衝突までの時間を T_0 とする。おもりは静止状態から加速度 a で動き始めるので、$v_0 = aT_0$ である。$0 < k < 1$ であるから等比級数（geometric series）は収束（converge）し、全体の時間は

$$T_0 + \sum_{n=0}^{\infty} t_n = T_0 + \left(\frac{2}{g} + \frac{2k}{a}\right) \frac{v_0}{1-k}.$$

ここで $1-k=\dfrac{M}{M+m}$ であり、$\dfrac{k}{a}=\dfrac{m}{M+m}\cdot\dfrac{M+m}{g(M-m)}=\dfrac{m}{g(M-m)}$ である。よって

$$\frac{2}{g}+\frac{2k}{a}=\frac{2}{g}\left(1+\frac{m}{M-m}\right)=\frac{2M}{g(M-m)},$$
$$\left(\frac{2}{g}+\frac{2k}{a}\right)\frac{v_0}{1-k}=\frac{2M}{g(M-m)}\cdot\frac{M+m}{M}v_0=\frac{2v_0}{a}=2T_0.$$

したがって、衝突は無限回起こるが、それに要する時間の合計は有限である。おもりが最終的に静止するまでの時間は

$$T_0+2T_0=3T_0,$$

であり、これは開始から最初の衝突までの時間のちょうど 3 倍である。

検算

- 極限 $m\to 0$ をとる。このとき $k\to 0$ かつ $a\to g$ であるから、おもりは最初の衝突の後、二度と持ち上がらない。残る時間は釣り合いおもりの飛行時間 $2v_0/g=2gT_0/g=2T_0$ だけであり、合計は $3T_0$ となって、一般の公式の予測と一致する。
- ランダムに選んだ M、m と落下の高さに対して、運動を数値的に段階を追って計算した（たとえば $M=2.403$、$m=1.571$ で、$k=0.3953$）。速さの比と時間間隔の比はいずれも 0.3953 となり、等比数列の残りの部分を含めた全体の時間は $2.99998\,T_0$ となった。

よくある間違い

- 自由飛行の段階を忘れること。釣り合いおもりは衝突の後も上昇し続けるので、1 つの周期には、それが放物体として運動する時間 $2v/g$ が含まれる。
- 糸がたるんでいる段階で g の代わりに a を用いること。糸がたるめば、釣り合いおもりに作用するのは重力だけである。
- 糸が張る瞬間に、2 つの速度を同じ向きにとって「全運動量は保存される」と書くこと。滑車が糸の向きを変えるので、分け合われるのは**糸に沿った**運動量である。

STEP のその先へ

このパイルドライバーや弾むボールのように、有限の時間内に無限回の事象が起こる現象は、ゼノン的振る舞い（Zeno behaviour）と呼ばれる。これは、滑らかな運動が突

然の跳躍によって中断されるハイブリッドシステム（hybrid systems）の理論に現れる。糸が急に張る現象は、単純な撃力的拘束（impulsive constraint）である。ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）では、大学 1 年次にこのような拘束を体系的に扱う。力積、衝突、拘束された運動についてさらに学ぶには、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。