解答例

STEP I 1991、第 10 問

力学 ・ 垂れ下がる鎖のつり合い

STEP I 1991、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/91-s1-q10

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.14 節「懸垂線ではなく放物線」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/bridge-parabola.html

鍵となる考え方

鎖の各節点は、隣り合う二つのリンクの張力（tension）と、そこから吊り下げられた重さ w の三つの力のもとで平衡（equilibrium）にある。水平方向に力を分解すると、すべてのリンクで張力の水平成分が**等しい**ことがわかる。次に鉛直方向に分解すると、各節点で鉛直成分がちょうど w ずつ減ることがわかり、水平方向の間隔は一定であるから、リンクの傾きは等差数列（arithmetic progression）をなす。傾きが等差数列をなすことは、放物線（parabola）の離散的な特徴である。

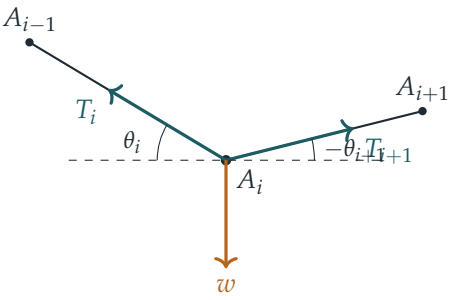
解答

平衡の方程式

鎖は軽く、柔軟で、伸び縮みしないものとしてモデル化する。したがって、各リンク $A_{i-1}A_i$ の張力はそのリンクに沿ってはたらく。θ_i を、$A_{i-1}A_i$ が水平となす角とし、x が増加する向きに進むときに**下向き**を正として測る。すなわち

$$\tan\theta_i = \frac{y_{i-1} - y_i}{h}.$$

である（橋の右半分では θ_i は負になるが、以下の議論はその符号によらない）。節点 A_i は、A_iA_{i-1} に沿って T_i で、A_iA_{i+1} に沿って T_{i+1} で引かれ、さらに支柱によって大きさ w の力で下向きに引かれる。



$1 \le i \le n+1$（実際にはすべての $1 \le i \le 2n+1$）について、A_i で水平方向と鉛直方向に力を分解すると

$$T_i \cos\theta_i = T_{i+1}\cos\theta_{i+1},$$
$$T_i \sin\theta_i - T_{i+1}\sin\theta_{i+1} = w.$$

これらが求める方程式である。

比

第 1 式は、$T_i\cos\theta_i$ がすべてのリンクで等しいことを表している。この共通の水平成分を H とおく。鎖は引くことしかできないので、これは正である。第 2 式を H で割り、$\tan\theta_i = (y_{i-1}-y_i)/h$ を用いると

$$\frac{H}{h}(y_{i-1}-y_i) - \frac{H}{h}(y_i - y_{i+1}) = w.$$

となる。そこで、リンク i の張力の鉛直成分を $V_i = H(y_{i-1}-y_i)/h$ と書けば

$$V_i - V_{i+1} = w \quad (1 \le i \le 2n+1), \qquad \text{よって} \qquad V_i = V_1 - (i-1)w \quad (1 \le i \le 2n+2).$$

考えてみよう 未知数 V_1 が一つ残っている。橋のどの事実がこれを決めるだろうか？

支点は同じ高さにある。鎖全体にわたって下がった量を足し合わせると

$$\begin{aligned} 0 = y_0 - y_{2n+2} &= \sum_{i=1}^{2n+2}(y_{i-1}-y_i) = \frac{h}{H}\sum_{i=1}^{2n+2} V_i \\ &= \frac{h}{H}\Big[(2n+2)V_1 - w\big(0+1+\cdots+(2n+1)\big)\Big]. \end{aligned}$$

括弧の中は $(2n+2)V_1 - w(2n+1)(n+1)$ であるから、$V_1 = \frac{1}{2}(2n+1)w$ である（これは全体の鉛直方向のつり合いから予想されることとも一致する。すなわち、二つの支点が全荷重 $(2n+1)w$ を等分して支えている）。したがって

$$V_i = \tfrac{1}{2}(2n+3-2i)\,w, \qquad \text{すなわち} \qquad y_{i-1}-y_i = \frac{(2n+3-2i)\,wh}{2H}.$$

$i = n+1, n, \ldots, 1$ とおくと、下がる量は $wh/(2H)$ の $1, 3, \ldots, 2n+1$ 倍となる：

$$\frac{h}{y_n - y_{n+1}} = \frac{3h}{y_{n-1} - y_n} = \cdots = \frac{(2n+1)h}{y_0 - y_1} = \frac{2H}{w},$$

これが求める等式の連鎖である（最後の分子は問題用紙では $(2n+1)y$ と印刷されているが、規則性から見ても、また他の比と同様に無次元であるためにも、$(2n+1)h$ でなければならない）。

放物線

$k = wh/(2H)$ とおく。A_0 から下がる量を足し合わせると

$$y_i = y_0 - k\sum_{j=1}^{i}(2n+3-2j) = y_0 - k\big[(2n+3)i - i(i+1)\big] = y_0 - k\,i\,(2n+2-i).$$

$m = n+1$ と書くと $i(2m-i) = m^2 - (i-m)^2$ であるから

$$y_i = (y_0 - km^2) + k(i-m)^2 = y_{n+1} + k(i-n-1)^2,$$

となる。ここで、$i = m$ とおくと $y_0 - km^2 = y_{n+1}$ となることを用いた。さて $x_i = x_0 + ih$ であるから $(i-n-1)h = x_i - x_{n+1}$ であり、すべての点 A_i（$0 \le i \le 2n+2$）は

$$y = y_{n+1} + \frac{w}{2Hh}\,(x - x_{n+1})^2.$$

を満たす。これは最下点 A_{n+1} を通る鉛直な軸をもつ一つの放物線であり、したがって点 $A_0, A_1, \ldots, A_{2n+2}$ はすべてこの上にある。端点も含まれている。実際、$i = 0$ と $i = 2n+2$ はどちらも y_0 を与え、そうなるべきとおりである。

検算

- $n = 0$ のとき、支柱は中央に 1 本だけである。公式は $V_1 = \frac{1}{2}w$ を与えるので、鎖の左右それぞれが荷重の半分を支えることになり、当然そうなるべきとおりである。
- 結果は連続的な描像と一致する。水平方向の単位長さあたり w/h の一様な荷重を、水平張力 H のケーブルから吊るすと $y'' = (w/h)/H$ となり、我々の放物線は $y'' = w/(Hh)$ を満たす。
- 数値的な検算として、ランダムな橋を 200 個（$1 \le n \le 8$、H、w、h はランダム）とり、節点の方程式を正確な分数による連立一次方程式として直接解いて、比、公式 $y_i = y_0 - k\,i(2n+2-i)$、放物線、およびすべての節点における力のつり合いを確認した。たとえば $n = 2$、$w = 2$、$H = 5$、$h = 1$ のとき、下っていく区間で下がる量は 1.0, 0.6, 0.2 であり、各比は $2H/w = 5$ に等しい。

よくある間違い

- 対称性を用いて、説明なしに $y_n = y_{n+2}$ とすること。これは正しいが、支点が同じ高さにあることから導かれる事実である。上の和をとる議論は、これを仮定するのではなく証明している。
- 張力の水平成分が一定であることを見落とし、各 T_i を個別に求めようとすること。この問題では T_i そのものは一度も必要ない（それらは $\sqrt{H^2 + V_i^2}$ である）。
- 鎖の上り側の半分で θ_i の符号を取り違えること。全体を通して $\tan\theta_i = (y_{i-1} - y_i)/h$ を用いて考えれば、これを避けられる。

STEP のその先へ

自重で垂れ下がる鎖は懸垂線（catenary）$y = c\cosh(x/c)$ をなすが、道路の床版のように**水平方向**に一様に分布した荷重を支える鎖は放物線をなす。この問題はその事実の離散版である。2 階差分の方程式 $y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} =$ 一定 は $y'' =$ 一定 の差分（finite difference）形であり、同じ考え方が微分方程式の数値解法の根底にある。変分法（calculus of variations）では懸垂線やその仲間を扱う。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、弦やケーブルの静力学（statics）が丁寧に扱われているのを見るのによい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。