解答例

STEP I 1991、第 1 問

純粋数学 ・ 三角関数の恒等式

> **STEP I 1991、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q1

鍵となる考え方

角に関する条件を使えば、角の一つを消去できる。$\psi = \frac{1}{2}\pi - (\theta + \phi)$ であるから $\sin\psi = \cos(\theta + \phi)$ となり、恒等式（identity）は二つの自由な角についての主張になる。そのあと、積 $\sin\theta\sin\phi$ と $\cos(\theta + \phi)$ がまとまって $\cos(\theta - \phi)$ となり、積 $\cos(\theta + \phi)\cos(\theta - \phi)$ は非常にすっきりした形をもつ。後半では、角を特別に選ぶことで ψ が θ の**半分**に等しくなる。$\frac{1}{10}\pi$ についての情報はここから得られるのである。

解答

恒等式

$\theta + \phi + \psi = \frac{1}{2}\pi$ であるから、

$$\sin\psi = \sin(\tfrac{1}{2}\pi - (\theta + \phi)) = \cos(\theta + \phi).$$

よって、恒等式の左辺は

$$L = \sin^2\theta + \sin^2\phi + \cos(\theta + \phi)[\cos(\theta + \phi) + 2\sin\theta\sin\phi].$$

括弧の中では $\cos(\theta + \phi) = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$ であるから、

$$\cos(\theta + \phi) + 2\sin\theta\sin\phi = \cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi = \cos(\theta - \phi).$$

次に積 $\cos(\theta+\phi)\cos(\theta-\phi)$ が必要である。加法定理（compound-angle formulae）を展開すると、

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\phi)\cos(\theta-\phi) &= (\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi)(\cos\theta\cos\phi+\sin\theta\sin\phi)\\ &= \cos^2\theta\cos^2\phi-\sin^2\theta\sin^2\phi\\ &= \cos^2\theta(1-\sin^2\phi)-(1-\cos^2\theta)\sin^2\phi\\ &= \cos^2\theta-\sin^2\phi.\end{aligned}$$

したがって

$$L=\sin^2\theta+\sin^2\phi+\cos^2\theta-\sin^2\phi=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,$$

となり、求める恒等式が得られる。

$\sin\frac{1}{10}\pi$ についての三次方程式

$\theta=\phi=\frac{1}{5}\pi$ とする。このとき $\psi=\frac{1}{2}\pi-\frac{2}{5}\pi=\frac{1}{10}\pi$ である。

$$x=\sin\tfrac{1}{10}\pi,\qquad s=\sin\tfrac{1}{5}\pi.$$

とおく。恒等式から

$$2s^2+x^2+2s^2x=1,\qquad \text{すなわち}\qquad 2s^2(1+x)=1-x^2. \tag{$*$}$$

> **考えてみよう** $\sin\psi=\cos 2\theta=1-2s^2$ を使って s を消去するだけではなぜいけないのか？

この関係式は $\psi=\frac{1}{2}\pi-2\theta$ を満たす**すべての** θ について成り立つので、$s^2=\frac{1}{2}(1-x)$ を $(*)$ に代入すると $(1-x)(1+x)=1-x^2$ が得られる。これは正しいが、何の情報も含まない。$\frac{1}{5}\pi$ に固有の性質を使わなければならないのである。その特別な事実とは $\frac{1}{5}\pi=2\cdot\frac{1}{10}\pi$、つまり $\theta=2\psi$ であることで、2 倍角の公式（double-angle formula）によって s と x が結びつく：

$$s=\sin 2\psi=2\sin\psi\cos\psi,\qquad \text{よって}\qquad s^2=4x^2(1-x^2).$$

これを $(*)$ に代入すると、

$$8x^2(1-x^2)(1+x)=1-x^2.$$

$0<\frac{1}{10}\pi<\frac{1}{2}\pi$ であるから $0<x<1$ であり、$1-x^2\neq 0$ なので両辺をこれで割ってよい：

$$8x^2(1+x)=1,\qquad \text{すなわち}\qquad 8x^3+8x^2-1=0.$$

よって、$\sin\frac{1}{10}\pi$ は与えられた三次方程式（cubic）を満たす。これが示すべきことであった。

検算

恒等式は $\theta = \frac{1}{2}\pi$、$\phi = \psi = 0$ で確かめられる。このとき左辺は $1+0+0+0=1$ である。$\theta = \phi = \psi = \frac{1}{6}\pi$ のときは $3\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{8}=1$ となる。

三次方程式については、$\sin\frac{1}{10}\pi = \sin 18^\circ \approx 0.309017$ であり、そこで $8x^3+8x^2-1$ を計算すると丸め誤差の範囲で 0 になる。実際、この三次式は $(2x+1)(4x^2+2x-1)$ と因数分解（factorise）でき、その根は $-\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{4}(-1\pm\sqrt{5})$ である。そして $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\approx 0.309017$ は $\sin 18^\circ$ のよく知られた厳密な値である。

よくある間違い

- $\sin\psi = \cos 2\theta$ だけを使って s を消去し、恒等式 $0=0$ を得てしまう。上の囲みを参照せよ。
- $1-x^2$ が 0 でない理由を述べずに、それで割ってしまう。ここでは $x = \sin\frac{1}{10}\pi$ は 0 と 1 の間に（端点を含まずに）ある。

STEP のその先へ

三次方程式の残りの二つの根も偶然ではない。$-\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right)$ であり、$\frac{1}{4}(-1-\sqrt{5}) = -\sin\frac{3}{10}\pi$ である。このような方程式は、π の有理数倍（rational multiples）における sin と cos の値の間の代数的な関係を記述しており、それは 1 の冪根（roots of unity）を通して理解するのが最もよい。$\cos\frac{1}{5}\pi$ は 1 の 5 乗根、すなわち $z^5=1$ の解と密接に結びついている。定規とコンパス（ruler and compasses）による正五角形（regular pentagon）の作図が $\sqrt{5}$ に帰着するのはこのためである。Needham の *Visual Complex Analysis*（複素解析を視覚的に理解する本）は、これらの考え方を幾何学的に見ることのできる美しい一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。