解答例

STEP III 1990、第 9 問

純粋数学 ・ 双曲線関数

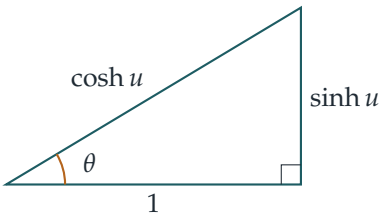
STEP III 1990、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s3-q9

鍵となる考え方

関係式 $\tan\theta = \sinh u$ は $\sec^2\theta = 1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u$ と同値である。したがって、2 つの変数の三角関数（trigonometric functions）と双曲線関数（hyperbolic functions）はぴったり対応する：$\cos\theta = \operatorname{sech} u$、$\sin\theta = \tanh u$、$\sec\theta = \cosh u$ である。辺の長さが 1、$\sinh u$、$\cosh u$ の直角三角形を描けば、これらすべてが一目でわかる。この「対応表」を手に入れてしまえば、各小問は短い微分計算をしてから元の変数に翻訳し直すだけである。



解答

全体を通して、$0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$ より $\tan\theta \ge 0$ であるから、$\sinh u \ge 0$ かつ $u \ge 0$ である。また $\cos\theta > 0$ かつ $\cosh u > 0$ である。

小問 (i)

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ と $1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u$ を用いると、

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u.$$

$\sec\theta$ と $\cosh u$ はともに正であるから $\sec\theta = \cosh u$、すなわち $\cos\theta = \operatorname{sech} u = v$ となり、示すべきことが得られた。

対になる事実も記録しておく価値がある：$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = \sinh u \operatorname{sech} u = \tanh u$ である。

小問 (ii)

$\tan\theta = \sinh u$ を u について（連鎖律（chain rule）を用いて陰関数として）微分すると、

$$\sec^2\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u} = \cosh u \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u} = \cosh u\cos^2\theta = \cosh u\operatorname{sech}^2 u = \operatorname{sech} u = v,$$

ここで $\cos\theta$ には小問 (i) の結果を用いた。

小問 (iii)

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\cosh u = \sinh u$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\cosh u)^{-1} = -\frac{\sinh u}{\cosh^2 u} = -\operatorname{sech} u\tanh u.$$

対応表により $\operatorname{sech} u\tanh u = \cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ であるから、

$$\sin 2\theta = -2\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}.$$

2 階導関数については、積の微分法則（product rule）と $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\tanh u = \operatorname{sech}^2 u$ を用いる：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2} &= -\Big[(-\operatorname{sech} u\tanh u)\tanh u + \operatorname{sech} u\cdot\operatorname{sech}^2 u\Big]\\ &= \operatorname{sech} u(\tanh^2 u - \operatorname{sech}^2 u).\end{aligned}$$

$-\cosh u$ を掛けると $\operatorname{sech} u$ が消える：

$$-\cosh u\,\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}u^2} = \operatorname{sech}^2 u - \tanh^2 u = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta,$$

これが 2 つ目の結果である。

小問 (iv)

今度は u と v を θ の関数とみなす。小問 (i) より $v = \cos\theta$ かつ $\cosh u = \sec\theta$ であり、小問 (ii) より $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = 1\big/\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u} = 1/v$ である（$v > 0$ なのでこれは正当である）。よって

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = \sec\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} = \sec\theta\tan\theta,$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta} = -\sin\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\theta^2} = -\cos\theta.$$

考えてみよう 計算に取りかかる前に、(iv) の恒等式は印刷されたとおりで本当に正しいように見えるだろうか？

実は正しくない。印刷どおりだと第 1 項は $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}$ を含み、このとき左辺は

$$\begin{aligned}\sec\theta\cdot\sec\theta\tan\theta-\sin\theta\sec\theta\tan\theta+\sec^2\theta&=\sec^2\theta\tan\theta+(\sec^2\theta-\tan^2\theta)\\&=\sec^2\theta\tan\theta+1\ \geq 1,\end{aligned}$$

となり、決して 0 にならない。意図された恒等式は第 1 項に $\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\theta^2}$ を含むものである（v を u と誤った誤植（misprint）である）：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}\theta^2}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}+\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2=0.$$

4 つの導関数を代入すると、

$$\sec\theta(-\cos\theta)+(-\sin\theta)\sec\theta\tan\theta+\sec^2\theta=-1-\tan^2\theta+\sec^2\theta=0,$$

となる。$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$ だからである。これで訂正後の結果が証明された。

より簡潔な見方もある：積の微分法則により、最初の 2 項は $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\right)$ に等しく、$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}=-\sec\theta\sin\theta=-\tan\theta$ であって、その導関数は $-\sec^2\theta=-\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$ である。

検算

$u=\ln 2$ とすると $\sinh u=\frac{3}{4}$、$\cosh u=\frac{5}{4}$、$\tan\theta=\frac{3}{4}$ である。3–4–5 の直角三角形から $\cos\theta=\frac{4}{5}=\operatorname{sech}u$ および $\sin 2\theta=\frac{24}{25}$ が得られ、一方 $-2\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}u=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$ である。数値的にも、ランダムな 2000 点での差分（finite difference）による導関数は (i)–(iii) および訂正後の (iv) と約 10^{-7} の精度で一致し、印刷どおりの (iv) の左辺が $1+\sec^2\theta\tan\theta$ に等しいことも確認できる。

よくある間違い

- 正の符号が正しい理由を述べずに $\cos\theta=\pm\operatorname{sech}u$ から一方を選んでしまう。符号を決めるのは範囲 $0\leq\theta<\frac{1}{2}\pi$ である。
- $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$ が $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u}$ の逆数にすぎないことを忘れ、$\operatorname{arsinh}(\tan\theta)$ を一から微分してしまう。

STEP のその先へ

関数 $\theta(u)=\arctan(\sinh u)$ は**グーデルマン関数**（Gudermannian function）と呼ばれ、複素数を使わずに円関数と双曲線関数を結びつける。その逆関数 $u=\ln(\sec\theta+\tan\theta)=$

$\int_0^\theta \sec t \, \mathrm{d}t$ は、まさにメルカトル図法（Mercator projection）の地図における縦方向の座標である。同じ対応は $\cosh(\mathrm{i}x) = \cos x$ と書いたときにも現れる。これらのつながりを幾何学的に見るには、Needham の *Visual Complex Analysis*（『ビジュアル複素解析』）が素晴らしい一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。