解答例

STEP III 1990、第 8 問

純粋数学 ・ 完全微分方程式

> **STEP III 1990、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q8

鍵となる考え方

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(py'+qy)$ を展開して $Py''+Qy'+Ry$ と比較する。これにより p と q は完全に決まり、条件 $P''-Q'+R=0$ はちょうど最後の係数を一致させるための条件になっている。与えられた微分方程式ではこの条件が成り立つので、一度積分するだけで二階の方程式から一階線形微分方程式（first-order linear differential equation）へと直ちに移ることができ、あとは積分因子（integrating factor）で解き切ればよい。

解答

完全性の判定条件

任意の関数 p、q、y に対して、積の微分法（product rule）により

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(py'+qy) = py''+(p'+q)y'+q'y. \qquad (*)$$

が成り立つ。

必要性。 p と q（これらは y に依存しない）が、すべての y に対して $Py''+Qy'+Ry$ を $(*)$ に等しくするとする。$y=1$ とおくと $R=q'$ を得る。$y=x$ とおくと $Q+Rx=(p'+q)+q'x$ となるので $Q=p'+q$ である。$y=\frac{1}{2}x^2$ とおくと $P+Qx+\frac{1}{2}Rx^2 = p+(p'+q)x+\frac{1}{2}q'x^2$ となるので $P=p$ である。したがって

$$P''-Q'+R = p''-(p''+q')+q' = 0.$$

十分性。 $P''-Q'+R=0$ とする。

$$p=P, \qquad q=Q-P'.$$

と選ぶ。すると $p'+q = P'+Q-P' = Q$ であり、条件を用いれば $q' = Q'-P'' = R$ である。$(*)$ より、すべての y に対して $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(py'+qy) = Py''+Qy'+Ry$ となり、示すべきことが示された。

この計算からは、p と q が必然的に P と $Q-P'$ でなければならないこともわかる。以下ではこの方法で p、q を求める。

微分方程式

ここでは $P = x-x^4$、$Q = 1-7x^3$、$R = -9x^2$ であるから

$$P''-Q'+R = -12x^2-(-21x^2)-9x^2 = 0.$$

よって判定条件が適用でき、$p = P = x-x^4$、$q = Q-P' = (1-7x^3)-(1-4x^3) = -3x^3$ である。方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x-x^4)y'-3x^3y\right] = (x^3+3x)\mathrm{e}^x.$$

となる。部分積分（integration by parts）を繰り返すと $\int x^3\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x^3-3x^2+6x-6)\mathrm{e}^x$、$\int 3x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (3x-3)\mathrm{e}^x$ であるから

$$(x-x^4)y'-3x^3y = (x^3-3x^2+9x-9)\mathrm{e}^x+C.$$

$x=2$ において $y = 2\mathrm{e}^2$、$y'=0$ であるから、左辺は $-3\cdot 8\cdot 2\mathrm{e}^2 = -48\mathrm{e}^2$、右辺は $5\mathrm{e}^2+C$ となる。よって $C = -53\mathrm{e}^2$ である。

> **考えてみよう** 左辺 $(x-x^4)y'-3x^3y$ は $(x-x^4)y$ の導関数ではない。二度目の積分はどうすればよいだろうか？

x をくくり出すと、左辺は $x[(1-x^3)y'-3x^2y] = x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^3)y]$ となる。（これは通常の積分因子である。実際、$y'-\frac{3x^2}{1-x^3}y$ の積分因子は $\exp\int\frac{-3x^2}{1-x^3}\,\mathrm{d}x = 1-x^3$ である。）解は $x=2$ の近くで考えているので x で割ってよく、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x^3)y] = (x^2-3x+9)\mathrm{e}^x-\frac{9\mathrm{e}^x}{x}-\frac{53\mathrm{e}^2}{x}.$$

再び部分積分により $\int(x^2-3x+9)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x^2-5x+14)\mathrm{e}^x$ である。項 e^x/x は初等関数の範囲で原始関数をもたないので、出発点 $x=2$ からの積分の形のまま残しておく：

$$(1-x^3)y = (x^2-5x+14)\mathrm{e}^x-53\mathrm{e}^2\ln\frac{x}{2}-9\int_2^x\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t+D.$$

$x=2$ において左辺は $-7\cdot 2\mathrm{e}^2 = -14\mathrm{e}^2$、右辺は $8\mathrm{e}^2+D$ であるから $D = -22\mathrm{e}^2$ である。したがって

$$\boxed{y = \frac{1}{1-x^3}\left[(x^2-5x+14)\mathrm{e}^x-22\mathrm{e}^2-53\mathrm{e}^2\ln\frac{x}{2}-9\int_2^x\frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t\right]}$$

が $x > 1$ で成り立つ。y'' の係数 $x - x^4$ は $x = 1$ で 0 になるので、$x = 2$ を通る解は $x > 1$ で定義され、$x = 1$ を越えて延長する必要はない。

検算

- $x = 2$ において括弧内は $8e^2 - 22e^2 = -14e^2$ であり、$1 - 8 = -7$ で割ると $y = 2e^2$ となって、条件どおりである。
- もとの方程式を $x = 2$ から数値的に解き進める（四次のルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method））と $y(3) \approx 7.90306$ となり、積分をシンプソンの公式（Simpson's rule）で計算した上の式の値と一致する。両者は $x = 1.2$、1.5、4 でも一致する。
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(x - x^4)y' - 3x^3y\right]$ を展開すると、もとの $(x - x^4)y'' + (1 - 7x^3)y' - 9x^2y$ に戻る。

よくある間違い

- 一度目の積分の後で定数 C を書き忘れる。ここでは C は 0 ではなく、これが対数の項を生み出す。
- $\int e^x/x\,\mathrm{d}x$ を無理に閉じた形で表そうとする。それは不可能なので、下端を 2 とする定積分の形で残しておけばよい。そうすれば初期条件も適用しやすくなる。

STEP のその先へ

完全な導関数になっている式 $Py'' + Qy' + Ry$ は**完全**（exact）であるという。式 $P'' - Q' + R$ は、**随伴**（adjoint）方程式 $(Pz)'' - (Qz)' + Rz = 0$ の左辺に $z = 1$ を代入したものである。一般に、随伴方程式の任意の解 z は積分因子となり、$z(Py'' + Qy' + Ry)$ を完全にする。随伴の考え方は、自己随伴（シュトゥルム＝リウヴィル（Sturm–Liouville））問題やグリーン関数（Green's function）へとつながっていく。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）では、二階線形方程式の演習問題の中で完全方程式と随伴方程式を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。