解答例

STEP III 1990、第 7 問

純粋数学 • 陰関数のグラフ

> **STEP III 1990、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q7

鍵となる考え方

陰関数微分（implicit differentiation）を 2 回行うと、各点における $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ と $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ が得られ、これらがそのままテイラー級数（Taylor series）の係数になる。不等式については、この方程式が y についての **2 次式**にすぎないことに気づくのがこつである。点 (x,y) が存在しうるのは、その 2 次方程式が実数解をもつときに限られるので、判別式（discriminant）は 0 以上である。さらに 2 次方程式を具体的に解くと曲線全体の様子がわかる。曲線は 2 つの分枝（branch）からなり、それらは判別式が 0 になるところで出会う。

解答

以下を通して $F(x,y) = xy^2 + x^3 + a^2y - a^3$ とおく。代入すれば、P、Q、R で $F = 0$ となることが確かめられる。たとえば R では $a \cdot a^2 + a^3 - a^3 - a^3 = 0$ となる。

P、Q、R におけるテイラー級数

y を x の関数とみなして $F(x,y) = 0$ を x で微分すると、

$$y^2 + 2xyy' + 3x^2 + a^2y' = 0, \qquad \text{よって} \qquad y' = -\frac{y^2 + 3x^2}{2xy + a^2}.$$

最初の式をもう一度微分すると（項 $2xyy'$ からは $2yy' + 2xy'^2 + 2xyy''$ が出る）、

$$4yy' + 2xy'^2 + 6x + (2xy + a^2)\,y'' = 0.$$

各点で分母 $2xy + a^2$ は 0 でないので、これらの式から y' と y'' が定まり、$y = y_0 + y'h + \frac{1}{2}y''h^2 + \cdots$ となる。

$P(0,a)$ **において：** $y' = -a^2/a^2 = -1$ である。すると $4a(-1) + a^2 y'' = 0$ より $y'' = 4/a$ であり、

$$y = a - h + \frac{2}{a}h^2 + \cdots.$$

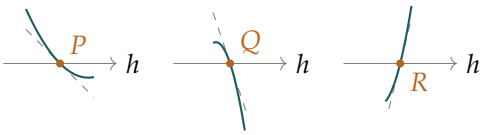
$Q(a,0)$ **において：** $y' = -3a^2/a^2 = -3$ である。すると $0 + 2a(9) + 6a + a^2 y'' = 0$ より $y'' = -24/a$ であり、

$$y = -3h - \frac{12}{a}h^2 + \cdots.$$

$R(a,-a)$ **において：** ここでは $2xy + a^2 = -a^2$ なので $y' = -4a^2/(-a^2) = 4$ である。すると $4(-a)(4) + 2a(16) + 6a - a^2 y'' = 0$、すなわち $22a = a^2 y''$ より $y'' = 22/a$ であり、

$$y = -a + 4h + \frac{11}{a}h^2 + \cdots.$$

したがって、P の近くでは曲線は傾き -1 で下降し、下に凸（接線より上側に曲がる）である。Q の近くでは傾き -3 で急に下降し、上に凸である。R の近くでは傾き 4 で上昇し、下に凸である。



（$a = 1$ のときの局所的な形。破線は接線である。）

不等式

C の方程式を y についての 2 次式として書く。

$$x\,y^2 + a^2\,y + (x^3 - a^3) = 0.$$

$x \neq 0$ で (x,y) が C 上にあるならば、この 2 次方程式は実数解 y をもつので、判別式は 0 以上である。

$$a^4 - 4x(x^3 - a^3) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4x^4 - 4a^3 x - a^4 \leq 0.$$

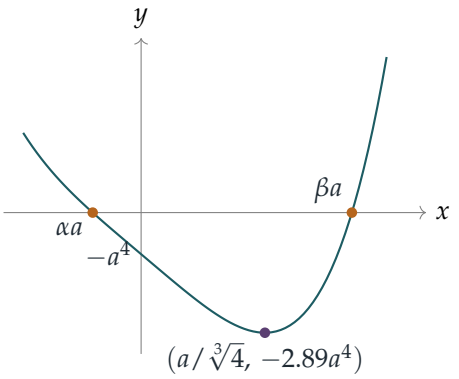
$x = 0$ のときは左辺が $-a^4 < 0$ となるので、この場合も不等式は成り立つ。以上で示された。

$y = 4x^4 - 4a^3 x - a^4$ のグラフ

問題文には $4x^4 - 4a^3 - a^4$ と印刷されているが、これは今出てきた 4 次式 $g(x) = 4x^4 - 4a^3 x - a^4$ の誤植であろう。$g(0) = -a^4$ であり、$g'(x) = 16x^3 - 4a^3$ は $x_0 = a/\sqrt[3]{4} \approx 0.63a$ でのみ 0 となり、そこで g は最小値をとる。$x_0^3 = a^3/4$ を用いると、

$$g(x_0) = a^3 x_0 - 4a^3 x_0 - a^4 = -a^4(1 + 3 \cdot 4^{-1/3}) \approx -2.89a^4.$$

$x \to \pm\infty$ のとき $g \to +\infty$ であり、g は減少したのち増加するので、ちょうど 2 つの零点 $x = \alpha a$ と $x = \beta a$ をもつ。ここで $\alpha \approx -0.246$、$\beta \approx 1.072$ は $4t^4 - 4t - 1 = 0$ の解である（きれいな閉じた形はないが、必要もない）。また $g''(x) = 48x^2 \geq 0$ なので、グラフは下に凸である。



（$a = 1$ として描いた。）したがって C 上のすべての点は $\alpha a \leq x \leq \beta a$ を満たす。曲線は縦の帯状領域の中に収まっている。

曲線 C

$x \neq 0$ のとき、2 次方程式を解くと 2 つの分枝

$$y_\pm = \frac{-a^2 \pm \sqrt{D}}{2x}, \qquad D = a^4 + 4a^3x - 4x^4,$$

が得られる。これらはちょうど帯状領域の上で実数となり、$D = 0$ となる $x = \alpha a$ と $x = \beta a$ で出会う。そこでは $y = -a^2/(2x)$ であり、接線は垂直である。なぜなら、そこは y' の分母 $2xy + a^2$ が 0 になる点だからである。これにより点 $(\beta a, -0.47a)$ と $(\alpha a, 2.03a)$ が得られる。

考えてみよう $x \to 0$ のとき、2 つの分枝はどうなるか。

分子と分母に $\sqrt{D} + a^2$ を掛け、$D - a^4 = 4x(a^3 - x^3)$ を用いると、

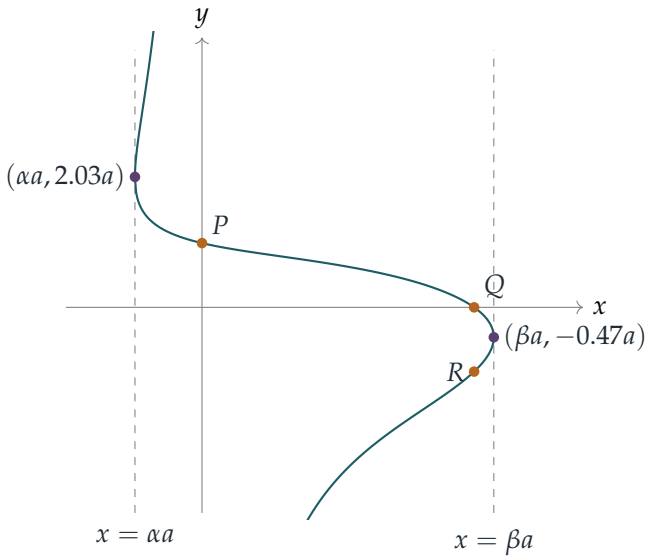
$$y_+ = \frac{2(a^3 - x^3)}{a^2 + \sqrt{D}},$$

となる。これは $x = 0$ でまったく問題なく振る舞い、そこでの値は a である。よって y_+ は P を通る 1 本のなめらかな分枝である。もう一方の分枝は小さな x に対して $y_- \approx -a^2/x$ を満たすので、$x \to 0^+$ のとき $y_- \to -\infty$、$x \to 0^-$ のとき $y_- \to +\infty$ となる。これが y 軸に沿った漸近線（asymptote）である。

概形を確定させるのに役立つ事実をさらに挙げておく。

- 水平な接線は存在しない。$y' = 0$ となるには $y^2 + 3x^2 = 0$、すなわち $(0,0)$ でなければならないが、この点は C 上にない。
- 曲線が $y = 0$ と交わるのは $x^3 = a^3$ となる点 Q のみであり、$x = 0$ と交わるのは P のみである。
- $x = a$ では $D = a^4$ なので、$y_+ = 0$（点 Q）、$y_- = -a$（点 R）である。

以上をまとめると、C は 1 本のつながった曲線である。y 軸のすぐ左側を $+\infty$ から y_- に沿って下りてきて、$(\alpha a, 2.03a)$ の垂直な接線に達する。そこで折り返して y_+ に沿って P を通り（傾き -1）、Q を通って下降し（傾き -3）、$(\beta a, -0.47a)$ の垂直な接線に達する。そこで再び折り返して y_- に沿って R を通り（傾き 4）、y 軸のすぐ右側を $-\infty$ へと下りていく。P では下に凸、Q では上に凸なので、その間に変曲点（point of inflection）がある。



（$a = 1$ として描いた。破線は上で求めた帯状領域の境界である。）

検算

- $a = 1.7$ として、各点の近くの $x = x_0 + h$ で 2 次方程式を y について解いた。2 項までのテイラー級数の誤差は、h を半分にするごとに約 8 分の 1 になった。これは予想どおりの h^3 の振る舞いである。
- x の値を 10^5 個ランダムにとったところ、2 次方程式が実数解をもつのは、ちょうど $4x^4 - 4a^3x - a^4 \leq 0$ のときであった。

- 二分法（bisection）により $\alpha \approx -0.2463$、$\beta \approx 1.0724$ が得られる。$x = \pm 0.001$（$a = 1.7$）では、一方の解は a に近く、もう一方は $-a^2/x \approx \mp 2890$ に近い。

よくある間違い

- 係数 $\frac{1}{2}$ を忘れる。h^2 の係数は y'' ではなく $\frac{1}{2}y''$ である。
- 判別式を使うために x で割り、$x = 0$ の場合を別に確かめない。
- y_+ が P をなめらかに通ることを見落とす。$(-a^2 + \sqrt{D})/(2x)$ と書くと $x = 0$ で特異に見えるが、実際はそうではない。

STEP のその先へ

ここでは、陰関数のテイラー展開から点の近くでの曲線の振る舞いを求めた。$\partial F/\partial y \neq 0$ となるところでは y が x のなめらかな関数であることを保証する定理は**陰関数定理**（implicit function theorem）であり、多変数解析学の重要な結果である。帯状領域の端にある垂直な接線は、まさに $\partial F/\partial y = 2xy + a^2$ が 0 になる点である。この曲線は平面上の 3 次曲線であり、こうした曲線の研究は代数幾何学（algebraic geometry）や楕円曲線（elliptic curves）へとつながっていく。この種の問題をもっと解きたければ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics* に挑戦するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。