解答例

STEP III 1990、第 6 問

純粋数学 • 線形変換と楕円

STEP III 1990、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s3-q6

この問題は、*Beyond STEP* の第 7.2 節「向きを変えずに伸ばす」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/eigenvectors.html

鍵となる考え方

2 つの特別なベクトルはこの行列の固有ベクトル（eigenvector）であり、これが幾何学的な全体像を教えてくれる。T はある直線に沿って一つの倍率で、それに垂直な直線に沿って別の倍率で引き伸ばすので、単位円（unit circle）はそれらの直線を軸とする楕円（ellipse）になる。計算の面では、E の方程式を求める最も簡潔な方法は、T の逆変換（inverse）をとって x と y を X と Y で表し、$x^2 + y^2 = 1$ に代入することである。面積は行列式（determinant）倍になり、また T は直線を直線に写すので、E の接線（tangent）は単に C の接線の像である。

解答

$M = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ とおくと、T は M を掛ける写像である。

2つの特別な方向

計算すると

$$M\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}9-4\\-2+12\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}5\\10\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},$$
$$M\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}18+2\\-4-6\end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix}20\\-10\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}.$$

よって $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ は向きを保ったまま2倍され、$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ は向きを保ったまま4倍される。これが示すべきことであった。$1\cdot 2 + 2\cdot(-1) = 0$ であるから、これら2つの方向は垂直であることに注意しよう。

E の方程式

M の行列式は

$$\det M = \left(\tfrac{2}{5}\right)^2 (9\cdot 6 - (-2)(-2)) = \tfrac{4}{25}\cdot 50 = 8,$$

であり、これは0でないので T は逆変換をもち、

$$M^{-1} = \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{5}\begin{pmatrix}6&2\\2&9\end{pmatrix} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix}6&2\\2&9\end{pmatrix}.$$

したがって、点 (X,Y) が (x,y) の像であるのは、ちょうど

$$x = \frac{3X+Y}{10}, \qquad y = \frac{2X+9Y}{20}.$$

のときである。点 (X,Y) が E 上にあるのは、もとの点が C 上にあるとき、すなわち $x^2+y^2=1$ のとき、かつそのときに限る。代入すると

$$\begin{aligned}\frac{(3X+Y)^2}{100} + \frac{(2X+9Y)^2}{400} = 1 &\iff 4(9X^2+6XY+Y^2) + (4X^2+36XY+81Y^2) = 400\\ &\iff 40X^2+60XY+85Y^2 = 400\\ &\iff 8X^2+12XY+17Y^2 = 80,\end{aligned}$$

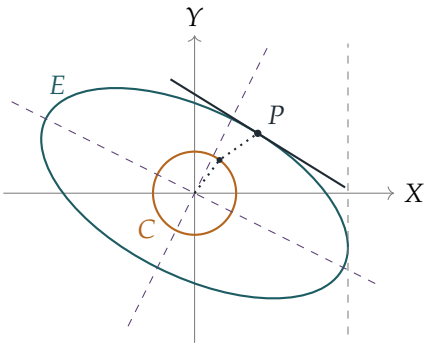
となり、これが求める E の方程式である。

面積

線形写像（linear map）はあらゆる面積を $|\det M|$ 倍する。C で囲まれた円板の面積は π であるから、E で囲まれた領域の面積は

$$8\pi.$$

である。これは幾何学的な見方とも一致する。E は半軸（semi-axis）が 2（$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 方向）と 4（$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ 方向）の楕円であり、$\pi\cdot 2\cdot 4 = 8\pi$ となる。



図には、C、楕円 E とその軸（破線）、E に接する鉛直線 $X = 2\sqrt{17/5}$、そして $\frac{1}{5}(3,4)$ の像 P における接線を示している。

X の最大値

E の方程式を Y についての二次方程式とみる：

$$17Y^2 + 12XY + (8X^2 - 80) = 0.$$

ある X の値が E 上に現れるのは、この方程式が実数解 Y をもつとき、すなわち判別式（discriminant）が非負であるとき、かつそのときに限る：

$$\begin{aligned} 144X^2 - 4\cdot 17(8X^2-80) \geq 0 &\iff 144X^2 - 544X^2 + 5440 \geq 0 \\ &\iff 400X^2 \leq 5440 \\ &\iff X^2 \leq \tfrac{68}{5}. \end{aligned}$$

よって E 上のすべての点で $X \leq \sqrt{68/5} = 2\sqrt{17/5}$ が成り立ち、等号も成立する（このとき判別式は 0 となり、$Y = -\frac{6X}{17}$ である 1 点が得られる）。したがって、E 上の X の最大値は $2\sqrt{17/5}$ である。これが示すべきことであった。

> **考えてみよう** 判別式を使わずに、円から直接これを見る方法はあるだろうか？

ある。E 上では、$x^2 + y^2 = 1$ のもとで $X = \frac{2}{5}(9x - 2y)$ である。$(x,y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ と書くと、式 $9\cos\theta - 2\sin\theta$ の最大値は $\sqrt{81+4} = \sqrt{85}$ である（$R\cos(\theta+\alpha)$ の形への合成）。よって X の最大値は $\frac{2}{5}\sqrt{85} = 2\sqrt{85/25} = 2\sqrt{17/5}$ であり、上の結果と一致する。

接線

C 上の点 $\frac{1}{5}(3,4)$ は

$$P = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 9\cdot\frac{3}{5} - 2\cdot\frac{4}{5} \\ -2\cdot\frac{3}{5} + 6\cdot\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} \frac{19}{5} \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38}{25} \\ \frac{36}{25} \end{pmatrix}.$$

に写る。$\frac{1}{5}(3,4)$ における C の接線はそこでの半径に垂直であるから、

$$3x + 4y = 5.$$

である。T は線形かつ逆変換をもつので、直線を直線に写し、C とちょうど 1 点で交わる直線は E とちょうど 1 点で交わる直線に写る。よって、P における E の接線はこの直線の像である。$x = \frac{3X+Y}{10}$ と $y = \frac{2X+9Y}{20}$ を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{3(3X+Y)}{10} + \frac{4(2X+9Y)}{20} = 5 &\iff 6(3X+Y) + 4(2X+9Y) = 100 \\ &\iff 26X + 42Y = 100, \end{aligned}$$

となるので、P における E の接線は

$$13X + 21Y = 50.$$

である。確認として、$13\cdot\frac{38}{25} + 21\cdot\frac{36}{25} = \frac{494+756}{25} = 50$ であるから、P はこの直線上にある。別解として、$8X^2 + 12XY + 17Y^2 = 80$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると、P における法線（normal）の方向は $(16X + 12Y,\ 12X + 34Y) = \frac{1}{25}(1040,\ 1680)$ であり、これは $(13,21)$ に平行であるから、同じ直線が得られる。

検算

- $(1,0)$ の像は $\frac{2}{5}(9,-2)$ であり、$\frac{4}{25}\left(8\cdot 81 - 12\cdot 18 + 17\cdot 4\right) = \frac{4}{25}\cdot 500 = 80$ であるから、これは E 上にある。
- 軸の端点 $\pm 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ と $\pm 4\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$ は E の方程式を満たす。たとえば $\frac{4}{5}(8 + 24 + 68) = 80$ である。
- 数値的に、C 上の 200 000 点をサンプリングすると X の最大値は $X \approx 3.687818$ となり、$2\sqrt{17/5} \approx 3.687818$ と一致する。また、像の多角形の靴ひも公式（shoelace formula）による面積は $25.13274 \approx 8\pi$ である。

よくある間違い

- $x^2 + y^2 = 1$ に代入するときに M^{-1} ではなく M を用いてしまう。像の曲線の方程式を得るには、古い座標を新しい座標で表す必要がある。

- 行列式を計算するときに係数 $\frac{2}{5}$ を忘れてしまう。この係数の寄与は $\frac{2}{5}$ ではなく $\left(\frac{2}{5}\right)^2$ である。
- 像の点 P を求めたのに、E の接線として $\frac{1}{5}(3,4)$ における C の傾きを使ってしまう。線形写像は接することは保つが、傾きは保たない。

STEP のその先へ

ここでの行列は対称行列（symmetric matrix）であり、それこそが固有ベクトルが垂直になる理由である。これはスペクトル定理（spectral theorem）の 2 次元の場合であり、この定理は、すべての実対称行列は回転によって対角化（diagonalise）できることを述べている。これにより、任意の二次形式（quadratic form）$ax^2 + 2hxy + by^2$ が互いに垂直な主軸（principal axes）をもつ円錐曲線（conic）を表すことが説明され、その二次形式の行列の固有値（eigenvalue）から曲線の形がただちにわかる。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、固有値、対称行列、二次形式を、豊富な幾何学的な図とともに展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。