解答例

STEP III 1990、第 5 問

純粋数学 ・ ライプニッツの公式

> **STEP III 1990、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q5

鍵となる考え方

パスカルの法則（Pascal's rule）は、二つの項を通分してしまえば、階乗を含む分数の計算にすぎない。積の n 階導関数に関するライプニッツの公式（Leibniz's formula）は、n についての数学的帰納法（induction）で証明できる。n 階の公式をもう一度微分すると、混合項がそれぞれ二回ずつ現れ、その各組をまとめるのがまさにパスカルの法則である。最後の部分では、$y = \sin^{-1} x$ をそのまま n 回微分しようとしても見込みはない。代わりに、y が満たす簡単な二階の方程式を見つけ、それにライプニッツの公式を適用する。

（問題文には $y = \sin^{-1} y$ とあるが、これは明らかに $y = \sin^{-1} x$ の誤植であり、以下ではそちらを用いる。）

解答

パスカルの法則

$\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$、ただし $0! = 1$ であったことを思い出そう。$1 \le r \le n$ のとき $r - 1$ と $n - r$ はともに非負であるから、以下に現れる階乗はすべて意味をもつ。$r! = r\,(r-1)!$ かつ $(n-r+1)! = (n-r+1)\,(n-r)!$ であるから、共通の分母は $r!\,(n-r+1)!$ であ

る：

$$\begin{aligned}\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1} &= \frac{n!}{r!\,(n-r)!}+\frac{n!}{(r-1)!\,(n-r+1)!}\\ &= \frac{n!\,(n-r+1)}{r!\,(n-r+1)!}+\frac{n!\,r}{r!\,(n-r+1)!}\\ &= \frac{n!\,(n+1)}{r!\,(n+1-r)!}=\frac{(n+1)!}{r!\,(n+1-r)!}=\binom{n+1}{r}.\end{aligned}$$

ライプニッツの公式

u と v は必要なだけ何回でも微分できるものとする。和の記号を用いると、主張は

$$(uv)^{(n)}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}u^{(n-r)}v^{(r)},$$

である。ここで $z^{(0)}$ は z 自身を表す。これを $n\geq 1$ についての帰納法で証明する。

基本の場合 $n=1$。右辺は $u^{(1)}v+uv^{(1)}$ であり、積の微分法則（product rule）によりこれは $(uv)'$ に等しい。

帰納段階。ある $n\geq 1$ について公式が成り立つと仮定する。各項に積の微分法則を用いて、これを微分すると

$$(uv)^{(n+1)}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}u^{(n+1-r)}v^{(r)}+\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}u^{(n-r)}v^{(r+1)}.$$

となる。第二の和で $s=r+1$ とおくと、それは $\sum_{s=1}^{n+1}\binom{n}{s-1}u^{(n+1-s)}v^{(s)}$ となる。これで両方の和が $u^{(n+1-r)}v^{(r)}$ の形の項からなる。第一の和の $r=0$ の項と、第二の和の $s=n+1$ の項を分けて書くと

$$\begin{aligned}(uv)^{(n+1)} &= u^{(n+1)}v+\sum_{r=1}^{n}\left[\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}\right]u^{(n+1-r)}v^{(r)}+uv^{(n+1)}\\ &= u^{(n+1)}v+\sum_{r=1}^{n}\binom{n+1}{r}u^{(n+1-r)}v^{(r)}+uv^{(n+1)},\end{aligned}$$

となる。ここでパスカルの法則を用いたが、$1\leq r\leq n$ であるから適用できる。$\binom{n+1}{0}=\binom{n+1}{n+1}=1$ であるから、これは

$$(uv)^{(n+1)}=\sum_{r=0}^{n+1}\binom{n+1}{r}u^{(n+1-r)}v^{(r)},$$

すなわち $n+1$ の場合の公式である。帰納法により、公式はすべての $n\geq 1$ について成り立つ。

$\sin^{-1} x$ の導関数

$-1 < x < 1$ において $y = \sin^{-1} x$ とする。このとき

$$y^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{よって} \qquad (1-x^2)(y^{(1)})^2 = 1.$$

これを x について微分すると

$$(1-x^2)\cdot 2y^{(1)}y^{(2)} - 2x(y^{(1)})^2 = 0.$$

$(-1,1)$ 上で $y^{(1)} > 0$ であるから、$2y^{(1)}$ で割ってよい：

$$(1-x^2)\,y^{(2)} - x\,y^{(1)} = 0. \qquad (*)$$

これが $n = 0$ の場合の求める結果である。

> **考えてみよう** $(1-x^2)^{-1/2}$ をそのまま微分するのではなく、微分する前に $y^{(1)}$ を二乗するのはなぜだろうか？

$(1-x^2)^{-1/2}$ を直接微分すると $y^{(2)} = x(1-x^2)^{-3/2}$ が得られ、$1-x^2$ を掛ければ同様に $(*)$ が得られる。どちらの方法でもよい。要点は、係数が x の**多項式**であり、y の導関数について**線形**であるような方程式にたどり着くことである。ライプニッツの公式がうまく扱えるのはまさにそのような方程式だからである。多項式の係数は何回か微分すればすぐに 0 になる。

さて、$n \geq 1$ として $(*)$ を n 回微分し、各積にライプニッツの公式を適用する。第一の積では $u = y^{(2)}$、$v = 1-x^2$ とする。すると $v^{(1)} = -2x$、$v^{(2)} = -2$ であり、それより高階の導関数はすべて 0 になるので、残る項は三つだけである：

$$\left((1-x^2)\,y^{(2)}\right)^{(n)} = (1-x^2)\,y^{(n+2)} + \binom{n}{1}(-2x)\,y^{(n+1)} + \binom{n}{2}(-2)\,y^{(n)}.$$

（$n = 1$ のときは最後の項が現れないが、これは $\binom{1}{2} = 0$ と整合する。）第二の積では $u = y^{(1)}$、$v = x$ とすると、残る項は二つだけである：

$$\left(x\,y^{(1)}\right)^{(n)} = x\,y^{(n+1)} + n\,y^{(n)}.$$

差をとると、$(*)$ の n 階導関数は

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)} - 2nx\,y^{(n+1)} - n(n-1)\,y^{(n)} - x\,y^{(n+1)} - n\,y^{(n)} = 0.$$

となる。項をまとめると $-2nx - x = -(2n+1)x$、$-n(n-1) - n = -n^2$ であるから

$$(1-x^2)\,y^{(n+2)} - (2n+1)x\,y^{(n+1)} - n^2 y^{(n)} = 0,$$

となり、求める結果が得られた。これはすべての $n \geq 0$ と、$(-1,1)$ のすべての x について成り立つ。

検算

- ライプニッツの公式で $n=1$ とすると、積の微分法則が得られる。$n=2$ のときは $(uv)''=u''v+2u'v'+uv''$ であり、これは $u'v+uv'$ を微分して確かめられる。
- $x=0$ において、最終結果は $y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$ を意味する。$y^{(1)}(0)=1$ から $y^{(3)}(0)=1$、$y^{(5)}(0)=9$ が得られるので、マクローリン級数（Maclaurin series）は $x+\frac{x^3}{6}+\frac{9x^5}{120}=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}$ で始まる。これは $\sin^{-1}x$ のよく知られた級数である。
- 数値的にも確認した：パスカルの法則は $n<60$ のすべてについて、ライプニッツの公式は 300 組のランダムな多項式の組について厳密に、最終的な恒等式は $(1-x^2)^{-1/2}$ のテイラー係数（Taylor coefficients）を用いて n が 27 以下の場合に $(-1,1)$ 内の 6 点で確認した。相対残差は 10^{-15} 未満であった。

よくある間違い

- 帰納段階で第二の和の添字を付け替えた後、二項係数（binomial coefficient）を間違える。パスカルの法則を適用する前に、$r=0$ と $r=n+1$ の端の項を別々に書き出すこと。
- まず方程式 $(*)$ を見つけるのではなく、$\sin^{-1}x$ を直接 n 回微分しようとする。
- $1-x^2$ を微分する際に、係数 $\binom{n}{2}$ やマイナス符号を忘れる。

STEP のその先へ

多項式係数の線形微分方程式（linear differential equation）を見つけ、それを n 回微分するという技法は、テイラー係数の漸化式を得る標準的な方法である。これはそのまま常微分方程式（ODE）の冪級数解（power-series solutions）の方法につながり、ルジャンドル関数（Legendre functions）やベッセル関数（Bessel functions）はこうして現れる。また、ライプニッツの公式は二項定理（binomial theorem）の微分版でもある。$u=e^{ax}$、$v=e^{bx}$ とすると、公式は $(a+b)^n=\sum\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$ に帰着する。級数解についてさらに知りたければ、Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。