解答例

STEP III 1990、第 4 問

純粋数学 ・ 三角級数

STEP III 1990、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s3-q4

鍵となる考え方

どちらの級数も、角が等間隔に増えていく余弦の和であるから、自然な道具が二つある。単純な和については、$2\sin\beta$ を掛けて積和公式（product-to-sum formula）を使う。すると各項が二つの正弦の差に分かれ、和は隣り合う項が打ち消し合って消えていく（telescoping）。二項係数付きの和と最後の恒等式については、$\cos\phi$ を $e^{i\phi}$ の実部（real part）とみなす。そうすれば二項定理（binomial theorem）や等比級数（geometric series）の和の公式が仕事をしてくれ、最後に実部または虚部（imaginary part）をとることで答えが得られる。

解答

第一の級数

この和を S とおく。積和公式 $2\sin A\cos B = \sin(B+A) - \sin(B-A)$ により、

$$2\sin\beta\cos(\alpha+2r\beta) = \sin(\alpha+(2r+1)\beta) - \sin(\alpha+(2r-1)\beta).$$

これを $r = 0, 1, \ldots, n$ について足し合わせると、和は次々に打ち消し合う。r に対する第一の正弦が、$r+1$ に対する第二の正弦と相殺されるのである。したがって残るのは二つの項だけである：

$$\begin{aligned} 2\sin\beta\, S &= \sin(\alpha+(2n+1)\beta) - \sin(\alpha-\beta) \\ &= 2\cos(\alpha+n\beta)\sin((n+1)\beta), \end{aligned}$$

ここで $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$ を $\frac{P+Q}{2} = \alpha + n\beta$、$\frac{P-Q}{2} = (n+1)\beta$ として用いた。$\sin\beta \neq 0$ であるから両辺を割ることができ、

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n} \cos(\alpha + 2r\beta) = \frac{\sin(n+1)\beta\,\cos(\alpha + n\beta)}{\sin\beta}}$$

$\alpha + n\beta$ が最初の角と最後の角の平均になっていることに注意しよう。これは式の形が妥当かどうかを確かめるよい目安になる。

二項係数付きの級数

この和を T とおく。$\cos\phi = \mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ であり、二項係数は実数であるから、二項定理により

$$T = \mathrm{Re}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta})^r = \mathrm{Re}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta})^n\right]$$

となる。ここで「半角」の因数をくくり出す：

$$1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}) = 2\cos\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}.$$

よって $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta})^n = 2^n\cos^n\beta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+n\beta)}$ であり、$2^n\cos^n\beta$ は実数であるから、

$$\boxed{\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\cos(\alpha+2r\beta) = 2^n\cos^n\beta\,\cos(\alpha+n\beta)}$$

（こちらは実際には $\sin\beta \neq 0$ を必要としない。）

最後の恒等式

正割（secant）が現れるので $\cos\theta \neq 0$ が必要であり、これは問題文で暗に仮定されている。第 r 項は $\cos r\theta\,\sec^r\theta = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sec\theta)^r$ である。$\sec^r\theta$ が実数だからである。そこで

$$w = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sec\theta = \frac{\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}{\cos\theta} = 1 + \mathrm{i}\tan\theta.$$

とおく。左辺は $\mathrm{Re}(1 + w + \cdots + w^n)$ である。

> **考えてみよう** ここで等比級数の和の公式を使ってよいのはなぜか。また、w を導入すると何がうれしいのか。

この公式には $w \neq 1$ が必要であり、$w - 1 = \mathrm{i}\tan\theta \neq 0$ となるのはまさに $\sin\theta \neq 0$ だからである。条件はここで使われる。w の利点は、$w-1$ が純虚数なので割り算が容易であり、一方で w^{n+1} は指数形式 $w = \sec\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ から容易に計算できることにある。$t = \tan\theta$ と書くと、

$$1 + w + \cdots + w^n = \frac{w^{n+1}-1}{w-1} = \frac{\sec^{n+1}\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta} - 1}{\mathrm{i}t}.$$

任意の複素数 z と実数 $t \neq 0$ に対して $\operatorname{Re}\dfrac{z}{it} = \operatorname{Re}\dfrac{-iz}{t} = \dfrac{\operatorname{Im} z}{t}$ が成り立つ。分子の -1 は虚部が 0 であるから、

$$\sum_{r=0}^{n} \cos r\theta \, \sec^r\theta = \frac{\sec^{n+1}\theta \, \sin(n+1)\theta}{\tan\theta} = \sec^{n+1}\theta \, \sin(n+1)\theta \cdot \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$= \frac{\sin(n+1)\theta \, \sec^n\theta}{\sin\theta},$$

となり、これが求める結果である。

第一の部分とのつながり。両辺に $\cos^n\theta$ を掛けると、この恒等式は

$$\sum_{r=0}^{n} \cos r\theta \cos^{n-r}\theta = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

を主張していることになる。この形であれば、n に関する数学的帰納法（induction）でも証明できる。左辺を C_n とすると $C_n = \cos\theta\, C_{n-1} + \cos n\theta$ であり、$\sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta = \sin(n+1)\theta$ によって帰納法の段階が完結する。

検算

- $n = 0$：三つの公式はいずれも最初の一項（$\cos\alpha$、$\cos\alpha$、1）に帰着する。
- 第一の和で $\beta \to 0$ とすると $\frac{\sin(n+1)\beta}{\sin\beta} \to n+1$ となるので $S \to (n+1)\cos\alpha$ であり、これは $n+1$ 個の等しい項の和として正しい。第二の和では、$\sum \binom{n}{r} = 2^n$ であるから、$\beta = 0$ のとき $2^n\cos\alpha$ となる。
- $\theta = \pi/4$、$n = 2$：左辺は $1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2} + 0 = 2$、右辺は $\sin\frac{3\pi}{4}\cdot 2/\sin\frac{\pi}{4} = 2$ である。
- 数値的にも、α、β、θ と $n \le 15$ を無作為に 20 000 通り選んだところ、三つの公式はすべて直接の和と（相対誤差で）10^{-9} 以内で一致した。

よくある間違い

- 第一の級数が（$r = 0$ から n までの）$n+1$ 項からなることを忘れ、$\sin(n+1)\beta$ の代わりに $\sin n\beta$ としてしまう。
- $1 + e^{2i\beta}$ を $2\cos\beta$ と書いて因数 $e^{i\beta}$ を落とし、答えの角がずれてしまう。
- 最後の部分で、分子と分母の実部を別々にとってしまう。まず分母を実数にしなければならない。

STEP のその先へ

cos を指数関数の実部として書くと、三角関数の和が等比級数や二項係数付きの和に変わる。これはフーリエ解析（Fourier analysis）の出発点である。第一の和は本質的にディリクレ（Dirichlet）核（Dirichlet kernel）$\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)/\sin\frac{x}{2}$ であり、これはフーリエ級数（Fourier series）がどのように収束するかを支配している。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、$e^{i\theta}$ を掛けることがなぜ回転を意味するのか、そしてこのような和がなぜきれいな公式にまとまるのかについて、見事に幾何学的な見方を与えてくれる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。