解答例

STEP III 1990、第 2 問

純粋数学 ・ 空間ベクトル

> **STEP III 1990、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q2

鍵となる考え方

4 点はすべて、ただ 1 本の曲線 $t \mapsto (t^3, t^2, t)$、すなわち**ねじれ三次曲線**（twisted cubic）の上にある。交わる 2 直線は共通の平面上にあるので、小問 (i) は O, A, B, C が決して同一平面上（coplanar）にないことを示す問題に帰着する。これは、ヴァンデルモンド行列式（Vandermonde determinant）と同じように因数分解できる行列式（determinant）の計算である。小問 (ii) では、条件 $ab = 1$ によって内積（scalar product）と長さがまとまり、ただ 1 つの量 $a^2 + 1/a^2$ の関数になる。

解答

まず、「相異なる」という条件から何がわかるだろうか。パラメータ t に対応する点の第 3 座標は t そのものなので、異なる点は異なるパラメータをもつ。したがって a, b, c は相異なる。また O は $t = 0$ に対応する点であるから、a, b, c のいずれも 0 ではない。

小問 (i)

直線 OA と BC が交わると仮定する。共通の点を通る 2 直線は共通の平面上にある（2 直線がたまたま一致する場合は、それらを含む任意の平面をとればよい）。よって O, A, B, C はすべて原点を通る 1 つの平面上にあり、位置ベクトル $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ は一次従属（linearly dependent）となる。これが起こるのは、ちょうど

$$D = \begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a \\ b^3 & b^2 & b \\ c^3 & c^2 & c \end{vmatrix} = 0.$$

となるときである。第1行から因数 a を、第2行から b を、第3行から c をくくり出すと、

$$D = abc\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}.$$

第1行と第2行のそれぞれから第3行を引き、最後の列に沿って展開すると、

$$D = abc\begin{vmatrix} (a-c)(a+c) & a-c & 0 \\ (b-c)(b+c) & b-c & 0 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = abc\,(a-c)(b-c)\begin{vmatrix} a+c & 1 \\ b+c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abc\,(a-b)(a-c)(b-c).$$

$a, b, c \neq 0$ であり、a, b, c は相異なるので、どの因数も0ではない。よって $D \neq 0$ であり、4点は同一平面上になく、したがって直線 OA と BC は交わりえない。（平行でもないので、2直線はねじれの位置（skew）にある。）

考えてみよう 4点が同一平面上にないことを示せば十分なのはなぜか。

交わる2直線は必ず1つの平面を張るからである。もし OA と BC が点 P で交わるならば、P を通り両直線を含む平面は O, A, B, C を含むことになる。そのような平面が存在しないことはすでに示した。

小問 (ii)

$b = 1/a$ とおく。このとき $a \neq 0$ であり、さらに $a \neq \pm 1$ である。そうでなければ $b = a$ となり、A と B が一致してしまうからである。内積は

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (ab)^3 + (ab)^2 + ab = 3,$$

であり、長さの2乗は

$$|\mathbf{a}|^2 = a^2(a^4 + a^2 + 1), \qquad |\mathbf{b}|^2 = \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^2} = \frac{a^4 + a^2 + 1}{a^6}.$$

である。これらを掛け合わせると $|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 = (a^4 + a^2 + 1)^2/a^4$ となるので、$|\mathbf{a}||\mathbf{b}| = (a^4 + a^2 + 1)/a^2$ であり、これは正である。$\theta = \angle AOB$ とおくと、

$$\cos\theta = \frac{3a^2}{a^4 + a^2 + 1} = \frac{3}{u+1}, \qquad \text{ただし} u = a^2 + \frac{1}{a^2}.$$

取りうる値。 相加平均・相乗平均の不等式（AM–GM）により（あるいは $a^2 + a^{-2} - 2 = (a - a^{-1})^2$ であることから）、$u \geq 2$ であり、等号は $a^2 = 1$ のときに限って成り立つが、これは除外されている。よって $u > 2$ であり、したがって

$$0 < \cos\theta = \frac{3}{u+1} < \frac{3}{3} = 1,$$

となり、$0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ を得る。これ以外の角はありえない。

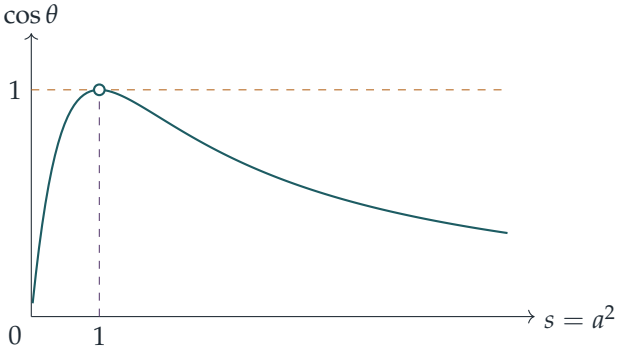
そのような値はすべて実際に現れる。 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ を満たす任意の θ をとると、$0 < \cos\theta < 1$ である。必要なのは $u = 3/\cos\theta - 1$ であり、これは 2 より大きい。方程式 $a^2 + 1/a^2 = u$ は a^2 についての 2 次方程式 $(a^2)^2 - u\,a^2 + 1 = 0$ であり、その解の 1 つは

$$a^2 = \frac{u + \sqrt{u^2 - 4}}{2} > 1,$$

である。$u > 2$ なので、これは実数である。a をその正の平方根とし、$b = 1/a$ とする。すると $a > 1 > b > 0$ なので、$ab = 1$、$A \neq B$ であり、どちらも O ではなく、$\cos\angle AOB = 3/(u+1) = \cos\theta$ となる。両方の角は余弦が単射（one-to-one）となる区間 $[0, \pi]$ にあるので、$\angle AOB = \theta$ である。

以上より、$\angle AOB$ は $0 < \angle AOB < \frac{1}{2}\pi$ のすべての値をとり、それ以外の値はとらない。これが示すべきことであった。

グラフは $s = a^2$ に対する $\cos\theta$ を表している。グラフは除外された値 $s = 1$ で 1 まで上昇し、両端では 0 に近づくので、その値域はちょうど $(0, 1)$ を埋め尽くす。



検算

- $a = 2, b = \frac{1}{2}$ を試す。$A = (8, 4, 2)$ と $B = (\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ から $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 + 1 + 1 = 3$ を得る。公式からは $\cos\theta = 12/21 = 4/7$ となり、$\theta \approx 55.2°$ で、これは区間の内部にある。
- $a \to 1$ のとき、点 A と B は 1 点に近づき、$\theta \to 0$ となる。$a \to \infty$ のとき、A はほぼ x 軸に沿って遠ざかり、B はほぼ z 軸に沿って O に近づくので、$\theta \to \frac{1}{2}\pi$ となる。これらが区間の両端である。
- D の因数分解は数千組の無作為な有理数 a, b, c について厳密に確かめ、角の公式とその範囲は数値的に確かめた。

よくある間違い

- a, b, c が相異なり 0 でない理由を述べ忘れる。これらこそが $D \neq 0$ を保証する事実である。
- $a = \pm 1$ を除外せずに、$\cos\theta < 1$ だけから結論を出す。$\theta = 0$ を排除するのは、狭義の不等式 $u > 2$ である。
- 「それ以外の値はとらない」ことだけを証明する。問題は区間内のすべての値が実際にとられることも示すよう求めており、そのためには具体的な a が必要である。

STEP のその先へ

曲線 (t^3, t^2, t) はねじれ三次曲線であり、代数幾何学（algebraic geometry）の標準的な例である。小問 (i) は、この曲線上のどの 4 点も同一平面上にないという事実である。また、計算した行列式はヴァンデルモンド行列式であり、多項式補間（polynomial interpolation）や一次独立（linear independence）に関する議論に再び登場する。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、行列式と一次独立をわかりやすく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。