解答例

STEP III 1990、第 16 問

確率・統計 ・ 幾何的確率

STEP III 1990、問 16

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s3-q16

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.21 節「棒を折る」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/broken-stick.html

鍵となる考え方

合計が一定である 3 つの長さが三角形をなすのは、どの長さも合計の半分より小さいとき、かつそのときに限る。三角形ができるとき、それが鈍角三角形（obtuse triangle）となるのは、最も長い辺の 2 乗が他の 2 辺の 2 乗の和より大きいとき、かつそのときに限る（余弦定理（cosine rule））。どちらの小問もこれらを確率変数に関する条件に書き換えることができ、確率は (i) では区間の長さ、(ii) では領域の面積になる。

解答

小問 (i)

3 つの部分の長さは X, $\frac{1}{2}(1-X)$, $\frac{1}{2}(1-X)$ であり、合計は 1 である。3 つの正の長さが三角形をなすのは、どの長さも他の 2 つの和より小さいとき、すなわち周長（perimeter）の半分（ここでは $\frac{1}{2}$）より小さいとき、かつそのときに限る。等しい 2 つの部分は $X > 0$ であれば常に $\frac{1}{2}(1-X) < \frac{1}{2}$ を満たすので、条件は $X < \frac{1}{2}$ だけである。三角形を作れるという事象を T とする。このとき

$$\mathrm{P}(T) = \mathrm{P}\left(0 < X < \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}.$$

三角形が鈍角三角形であるのは、最も長い辺の 2 乗が他の 2 辺の 2 乗の和より大きいとき、かつそのときに限る。どの辺が最も長いかは X によって決まる。

- $X \le \frac{1}{3}$ ならば $X \le \frac{1}{2}(1-X)$ であるから、等しい部分の一方が最も長い辺である。判定条件は $\frac{1}{4}(1-X)^2 > \frac{1}{4}(1-X)^2 + X^2$、すなわち $X^2 < 0$ となるが、これは決して成り立たない。この三角形は底辺が等しい 2 辺より長くない二等辺三角形（isosceles triangle）であり、決して鈍角三角形にはならない。
- $\frac{1}{3} < X < \frac{1}{2}$ ならば最も長い辺は X であり、三角形が鈍角三角形となるのは

$$X^2 > 2 \cdot \tfrac{1}{4}(1-X)^2 \iff X > \frac{1-X}{\sqrt{2}},$$

のとき、かつそのときに限る。ここで両辺は正なので、正の平方根をとった。これを整理すると $X(\sqrt{2}+1) > 1$、すなわち $X > \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \approx 0.414$ となり、これは確かに $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ に含まれる。

三角形が鈍角三角形であるという事象を O とする。このとき $O \cap T$ は事象 $\sqrt{2}-1 < X < \frac{1}{2}$ であり、X は一様分布（uniform distribution）に従うので、条件付き確率（conditional probability）は

$$\mathrm{P}(O \mid T) = \frac{\mathrm{P}(\sqrt{2}-1 < X < \frac{1}{2})}{\mathrm{P}(T)} = \frac{\frac{1}{2} - (\sqrt{2}-1)}{\frac{1}{2}} = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2},$$

となり、示すべきことが示された。

小問 (ii)

作図は常に可能である。 頂点 $(1,0), (1,1), (0,1)$ をもつ三角形 R は、$x \le 1, y \le 1, x+y \ge 1$ を満たす点全体の集合である。辺の候補 $x, y, 2-x-y$ の合計は 2 であり、これらが（退化している場合も含めて）三角形をなすのは、3 つすべてが非負で、どれも周長の半分 1 を超えないとき、かつそのときに限る：

- R 上では $0 \le x \le 1$ および $0 \le y \le 1$ が成り立つ。
- $2-x-y \le 1$ は $x+y \ge 1$ そのものであり、$2-x-y \ge 0$ は $x \le 1, y \le 1$ から従う。

したがって、R のどの点からも三角形が得られる。三角形が退化（degenerate）するのは R の辺上のみであり、その確率は 0 である。

$\angle ABC$ が鈍角となるのはいつか。 B における角は BA と BC の間にあるので、その対辺は $CA = y$ である。余弦定理より、$\angle ABC$ が鈍角となるのは $CA^2 > AB^2 + BC^2$ のとき、かつそのときに限る：

$$y^2 > x^2 + (2-x-y)^2.$$

$(2-x-y)^2=(2-x)^2-2(2-x)y+y^2$ と展開すると y^2 の項が打ち消し合い、条件は

$$2(2-x)y>x^2+(2-x)^2=2x^2-4x+4.$$

となる。$x\le 1$ より $2-x>0$ であるから、不等号の向きを変えずに $2(2-x)$ で割ることができ、

$$y>\frac{x^2-2x+2}{2-x},$$

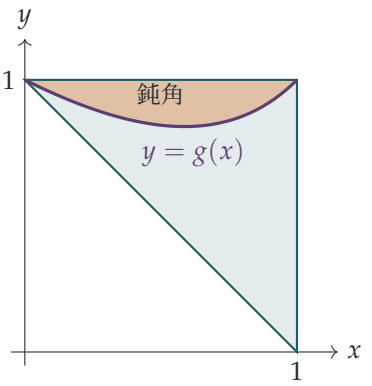
を得る。これが示すべきことであった。右辺を $g(x)$ とおく。

考えてみよう 曲線 $y=g(x)$ は本当に三角形 R の内部にとどまっているだろうか。

鈍角となる領域が単に R のうち曲線より上の部分となるためには、$0\le x\le 1$ において曲線が直線 $y=1-x$ と $y=1$ の間にあることが必要である。実際、

$$1-g(x)=\frac{(2-x)-(x^2-2x+2)}{2-x}=\frac{x(1-x)}{2-x}\ge 0,\qquad g(x)-(1-x)=\frac{x}{2-x}\ge 0,$$

であり、$g(0)=g(1)=1$ である。したがって曲線は $(0,1)$ から $(1,1)$ まで延び、$y=1$ より下に沈むが、斜辺（hypotenuse）$x+y=1$ より下に行くことはない。



確率。 三角形 R の面積は $\frac{1}{2}$ であるから、同時確率密度（joint density）は R 上で 2 であり、

$$\mathrm{P}(\angle ABC\text{ が鈍角})=2\times\text{面積}\{(x,y):g(x)<y\le 1,\ 0\le x\le 1\}=2\int_0^1\big(1-g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

g を積分するために $u=2-x$ と置換（substitution）すると、$x=2-u$ であり

$$x^2-2x+2=(2-u)^2-2(2-u)+2=u^2-2u+2,\qquad g=\frac{u^2-2u+2}{u}=u-2+\frac{2}{u}.$$

となる。x が 0 から 1 まで動くとき u は 2 から 1 まで動き、$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$ であるから、

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(u - 2 + \frac{2}{u}\right)\mathrm{d}u = \left[\tfrac{1}{2}u^2 - 2u + 2\ln u\right]_1^2$$
$$= (2 - 4 + 2\ln 2) - \left(\tfrac{1}{2} - 2\right) = 2\ln 2 - \tfrac{1}{2}.$$

よって

$$\mathrm{P}(\angle ABC \text{ が鈍角}) = 2\left(1 - 2\ln 2 + \tfrac{1}{2}\right) = 3 - 4\ln 2,$$

となり、示すべきことが示された。

検算

- 数値的には $3 - 2\sqrt{2} \approx 0.1716$、$3 - 4\ln 2 \approx 0.2274$ である。10^6 回の試行によるモンテカルロ・シミュレーション（Monte Carlo simulation）では、それぞれ約 0.1719 と 0.2278 が得られた。
- どちらの答えも 0 と 1 の間にある。(ii) では曲線が両端で $y = 1$ に接している。$x = 0$ では辺 BC が消え、$x = 1$ では辺 AB が消えるので、どちらも予想どおり退化した場合である。
- シンプソンの公式（Simpson's rule）で $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ を計算すると 0.886294 となり、$2\ln 2 - \frac{1}{2}$ と一致する。

よくある間違い

- (i) で条件付けを忘れること。鈍角三角形ができる条件なしの確率は $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$ であり、求める答えの半分である。
- (ii) で余弦定理に誤った辺を用いること。B における角の対辺は $CA = y$ であって、AB ではない。
- R 上の密度が 1 ではなく 2 であることを忘れること。そうすると答えが半分の大きさになる。

STEP のその先へ

確率を長さや面積に置き換えることを**幾何的確率**（geometric probability）といい、棒を無作為に折る問題はその古典的な問題の一つである。独立な一様分布に従う 2 点で棒を折るとき、三角形ができる確率は $\frac{1}{4}$ である。小問 (ii) は連続的な同時分布への最初の一歩であり、そこでは確率は領域上での同時確率密度の二重積分となる。Grimmett

と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は同時確率密度を扱っており、この種の問題がいくつか収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。