解答例

STEP III 1990、第 14 問

力学 ・ 力の系

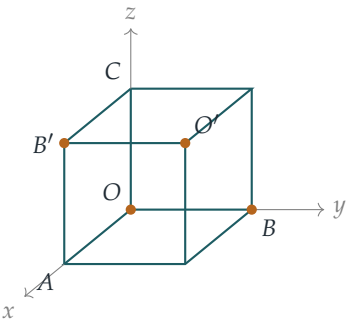
> **STEP III 1990、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q14

鍵となる考え方

剛体（rigid body）に働く力の系は、2 つのベクトルに帰着する。合力（resultant）$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}_i$ と、選んだ点のまわりのモーメント（moment）$\mathbf{G}_P = \sum (\mathbf{r}_i - \mathbf{p}) \times \mathbf{F}_i$ である。基準点を O から P へ移すと、モーメントは簡単な規則 $\mathbf{G}_P = \mathbf{G}_O - \mathbf{p} \times \mathbf{R}$ に従って変わる。この問題のどの小問も、P を変えてこの規則を使うだけである。

解答

立方体を一辺 a の剛体とみなす。$A = (a, 0, 0)$、$B = (0, a, 0)$、$C = (0, 0, a)$ とし、B と向かい合う頂点を $B' = (a, 0, a)$ とする。



λ、μ、ν を求める

O に働く力は O のまわりのモーメントをもたないので、残りの 3 つの力だけを考えればよい。外積（cross product）の公式 $(x, y, z) \times (p, q, r) = (yr - zq,\ zp - xr,\ xq - yp)$

を用いると、

$$\overrightarrow{OO'} \times \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda - 1 \\ -\lambda \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OB} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{OB'} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -\mu \\ 1 - \nu \\ \mu \end{pmatrix}.$$

これらを足すと、O のまわりの全モーメントは $a\,(3-\mu,\ \lambda-\nu,\ 1-\lambda+\mu)$ となる。各成分を 0 とおくと $\mu = 3$、次に $\lambda = 1+\mu = 4$、さらに $\nu = \lambda = 4$ を得る。

$$\lambda = 4, \qquad \mu = 3, \qquad \nu = 4.$$

これらはいずれも α, β, γ によらない。また合力は

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \alpha + \lambda - 1 + 1 \\ \beta + \mu \\ \gamma + 1 + 2 + \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 4 \\ \beta + 3 \\ \gamma + 7 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{G}_O = \mathbf{0}.$$

である。

小問 (i)

$\alpha = \beta = \gamma = 0$ のとき $\mathbf{R} = (4, 3, 7)$ である。2 つの力の系が同等（equivalent）であるのは、合力が等しく、かつある 1 点のまわりのモーメントが等しい（したがってすべての点のまわりで等しい）ときである。よって B に働く 1 つの力は $\mathbf{R}$ そのものでなければならず、偶力（couple）はもとの系の B のまわりのモーメントに等しくなければならない。

$$\mathbf{G}_B = \mathbf{G}_O - \overrightarrow{OB} \times \mathbf{R} = \mathbf{0} - a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = -a \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

考えてみよう なぜ B のまわりのモーメントは $\mathbf{G}_O - \overrightarrow{OB} \times \mathbf{R}$ に等しいのか？

各力について $(\mathbf{r}_i - \mathbf{b}) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i - \mathbf{b} \times \mathbf{F}_i$ が成り立つ。これを i について和をとれば $\mathbf{G}_O - \mathbf{b} \times \mathbf{R}$ となる。

したがって、同等な系は、B に働く力 $(4,3,7)$ と、モーメント $a(-7,0,4)$ の偶力の組である。検算として、B に働く力とこの偶力を合わせた O のまわりのモーメントは $a(7,0,-4)+a(-7,0,4)=\mathbf{0}$ となり、確かにそうなるべき値になっている。

小問 (ii)

このとき $\mathbf{R}=(2+4,\ 3+3,\ 2+7)=(6,6,9)=3(2,2,3)$ であり、やはり $\mathbf{G}_O=\mathbf{0}$ である。位置ベクトル $\mathbf{r}=(x,y,z)$ の点 P において、

$$\mathbf{G}_P=\mathbf{G}_O-\mathbf{r}\times\mathbf{R}=-\mathbf{r}\times\mathbf{R}.$$

$\mathbf{R}\neq\mathbf{0}$ であるから、これが 0 になるのは $\mathbf{r}$ が $\mathbf{R}$ に平行（または $\mathbf{r}=\mathbf{0}$）のときであり、そのときに限る。よって求める軌跡（locus）は、O を通り方向ベクトル $(2,2,3)$ をもつ直線

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}.$$

である。物理的には、系全体がこの直線に沿って働く 1 つの力 $(6,6,9)$ と同等であるということである。

立方体が並進（translation、回転を伴わない運動）するとき、すべての点が同じ変位だけ動くので、力のする仕事（work）は $\mathbf{R}\cdot\mathbf{s}$ である。ここで $\mathbf{s}$ は変位である。この直線に沿って $(2,2,3)$ の向きに距離 d だけ動くとき、$\mathbf{s}=\dfrac{d}{\sqrt{17}}(2,2,3)$ であり、

$$W=(6,6,9)\cdot\frac{d}{\sqrt{17}}(2,2,3)=\frac{51d}{\sqrt{17}}=3\sqrt{17}\,d.$$

問題文では距離に名前がついていないが、単位距離あたりの仕事は $3\sqrt{17}\approx 12.37$ である。$\mathbf{R}$ はこの直線上にあるので、これは単に $|\mathbf{R}|\,d=\sqrt{36+36+81}\,d=\sqrt{153}\,d$ であり、同じ値になる。（直線に沿って逆向きに動けば $-3\sqrt{17}\,d$ となる。）

検算

- $\lambda=4$、$\mu=3$、$\nu=4$ のとき、O のまわりの 3 つのモーメントは $a(1,3,-4)$、$a(2,0,1)$、$a(-3,-3,3)$ であり、和は 0 になる。
- (ii) で $P=(2,2,3)$ とすると $\mathbf{r}\times\mathbf{R}=(2,2,3)\times(6,6,9)=\mathbf{0}$ である。$P=(1,0,0)$ ではモーメントは $-(0,-9,6)\neq\mathbf{0}$ となる。
- 厳密な分数計算を行うコンピュータで、すべてのモーメントを確認した。また (i) の同等な系がランダムに選んだ 20 点のまわりでもとの系と同じモーメントをもつことを確かめ、単位距離あたりの仕事が $3\sqrt{17}\approx 12.369$ であることも確認した。

よくある間違い

- $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ の順序を取り違える。順序を逆にするとすべての符号が反転する。
- (i) の偶力を $+\overrightarrow{OB} \times \mathbf{R}$ としてしまう。力を O から B へ移すには、逆符号の補正の偶力が必要である。
- 異なる頂点に働く力ごとに仕事を足し合わせて求めようとする。純粋な並進では合力だけが問題になる。

STEP のその先へ

剛体に働く任意の力の系は、ある直線に沿った 1 つの力と、その同じ直線のまわりの偶力の組に帰着する。これを**レンチ**（*wrench*）といい、そのピッチ（pitch）は $\mathbf{R} \cdot \mathbf{G} / |\mathbf{R}|^2$ である。(ii) ではピッチが 0 なので、レンチは単なる 1 つの力であり、モーメントが 0 となる点の軌跡はその作用線、すなわち中心軸（central axis）である。これらの考え方は、剛体の力学や、ロボット工学におけるスクリュー理論（screw theory）へとつながっていく。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、トルクと剛体をちょうどよい水準で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。