解答例

STEP III 1990、第 13 問

力学 ・ 球の内部での運動

> **STEP III 1990、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q13

鍵となる考え方

運動は二つの段階に分かれる。まず垂直抗力（normal reaction）が 0 になるまでは球面上の円運動（circular motion）であり、その後は放物運動（projectile motion）として自由に飛ぶ。球面を離れる条件から、離れる瞬間の速さが θ を用いて定まる。あとはヒントのとおり、放物運動する質点が再び球面上に戻る条件 $x^2 + y^2 = a^2$ を t の方程式として書き下せばよい。離れる条件のおかげでいくつもの項が打ち消し合い、式は見事に簡単になる。

解答

モデル

P を質点とみなし、球（半径 a）はなめらかであるとする。したがって、P が球面に接している間に P にはたらく力は、重力 mg と、O に向かう垂直抗力 R だけである。運動は O を通る鉛直面内で起こる。原点を O とし、x 軸を水平に、y 軸を鉛直上向きにとり、P は球の右側を上っていくものとする。

そもそも P が球面を離れるとすれば、それは O より高い位置でなければならない。O より低い位置では、重力の PO 方向の成分は O から遠ざかる向きを向くので、P が円周上を運動している間に R が 0 になることはありえないからである。よって $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である。

球面を離れる

OP が鉛直上向きと角 θ をなすときの P の速さを v とする。このとき P は O より $a\cos\theta$ だけ高い位置にある。O に向かう方向に力を分解すると、重力のその方向の成分は $mg\cos\theta$ であるから

$$R + mg\cos\theta = \frac{mv^2}{a}.$$

P は $R = 0$ となるときに離れるので、その瞬間には

$$v^2 = ag\cos\theta.$$

（エネルギー保存（conservation of energy）より、打ち出す速さ u は $u^2 = v^2 + 2ga(1 + \cos\theta) = ag(2 + 3\cos\theta)$ を満たさなければならない。したがって u を適切に選べば、$(0, \frac{\pi}{2})$ 内のどの θ も実現できる。P が上っていくにつれて v は減少し R も減少するので、R が初めて 0 になるのはちょうどこの点である。）

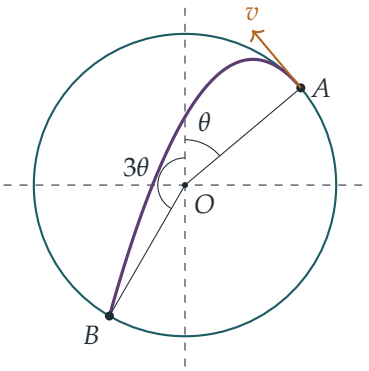
自由飛行

離れる瞬間を $t = 0$ とすると、P は $(a\sin\theta, a\cos\theta)$ にあり、その速度は接線（tangent）方向、すなわち OP に垂直で、頂上を越える向きに斜め上を向いている：

$$\text{速度} = v(-\cos\theta,\ \sin\theta).$$

その後は重力だけがはたらくので

$$x = a\sin\theta - vt\cos\theta, \qquad y = a\cos\theta + vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$



P は A で球面を離れ、以下で示すように B で再び球面に衝突する。

P が球面上にあるのは $x^2 + y^2 = a^2$ のときである。展開すると、定数項と t の 1 次の項はそれぞれ

$$a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta = a^2 \qquad \text{および} \qquad -2avt\sin\theta\cos\theta + 2avt\cos\theta\sin\theta = 0,$$

となるので

$$\begin{aligned} x^2+y^2-a^2 &= v^2t^2\cos^2\theta + v^2t^2\sin^2\theta - gt^2\left(a\cos\theta + vt\sin\theta\right) + \tfrac{1}{4}g^2t^4 \\ &= \left(v^2 - ag\cos\theta\right)t^2 - gv\sin\theta\, t^3 + \tfrac{1}{4}g^2t^4 \\ &= gt^3\left(\tfrac{1}{4}gt - v\sin\theta\right), \end{aligned}$$

である。最後の変形では $v^2 = ag\cos\theta$ を用いた。

考えてみよう なぜ $t=0$ は単なる解ではなく、三重解（triple root）として現れるのだろうか？

離れる瞬間には、円周上を運動するのに必要な O に向かう加速度 v^2/a を、重力だけがちょうど与えている。したがって放物線は、球面と同じ向きかつ同じ曲率（curvature）で出発する。放物線は球面にきわめて密着したまま進み、やがて球の内側へと離れていく。これが、t の項だけでなく t^2 の項まで打ち消し合う理由である。

$0 < t < 4v\sin\theta/g$ ではこの式は負であるから、P は球の真に内側にあり、次に球面と出会うのは

$$T = \frac{4v\sin\theta}{g}.$$

のときである。

着地点

$t = T$ において、$vT\sin\theta = 4v^2\sin^2\theta/g = 4a\cos\theta\sin^2\theta$ および $\frac{1}{2}gT^2 = 8v^2\sin^2\theta/g = 8a\cos\theta\sin^2\theta$ を用いると

$$y = a\cos\theta + 4a\cos\theta\sin^2\theta - 8a\cos\theta\sin^2\theta = a\cos\theta\left(1 - 4\sin^2\theta\right).$$

（$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos\theta(1-4\sin^2\theta)$ であるから、これは $a\cos 3\theta$ に等しい。同様に $x = -a\sin 3\theta$ となるので、衝突点 B は図のように、反対側で鉛直上向きから角 3θ の位置にある。）

P が O より低い位置で衝突するのは、ちょうど $y < 0$ のときである。$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\cos\theta > 0$ であるから

$$y < 0 \iff 1 - 4\sin^2\theta < 0 \iff \sin\theta > \tfrac{1}{2} \iff \theta > \tfrac{\pi}{6},$$

となる。最後の同値は、sin が $(0, \frac{\pi}{2})$ で増加することによる。ちょうど $\theta = \frac{\pi}{6}$ のときは、P は O とちょうど同じ高さで球面に衝突する。よって θ が超えなければならない角は

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{6} = 30^\circ}$$

であり、$30^\circ < \theta < 90^\circ$ を満たすすべての θ に対して、実際に O より低い位置で衝突する。

検算

- $\theta = 60°$：公式から $y = a\cos 180° = -a$ となり、P は最下点、すなわち打ち出した点に戻ってくる。$\theta = 45°$ のときは、鉛直上向きから 135° の位置に着地する。どちらも当然 $y < 0$ である。
- $\theta \to 0$ のとき $T \to 0$ かつ $B \to A$ である。頂上でかろうじて離れる質点は、そのまま球面上に落ちてくる。
- 数値シミュレーション（$R = 0$ となるまで球面上の運動を刻んで計算し、その後は球面と出会うまで放物運動を計算する）を $\theta = 10°, 25°, 29°, 30.5°, 31°, 45°, 60°, 80°$ について行ったところ、小数第 4 位まで $T = 4v\sin\theta/g$ および $y = a\cos 3\theta$ と一致した。たとえば $\theta = 31°$ では $y/a = -0.0523$ となる。

よくある間違い

- 速度の向きを取り違える。速度は OP に垂直で、まだ頂上を越える向きに上を向いており、その成分は $(v\sin\theta,\, v\cos\theta)$ ではなく $(-v\cos\theta,\, v\sin\theta)$ である。
- $x^2 + y^2 = a^2$ を解く前に $v^2 = ag\cos\theta$ を使うのを忘れる。そうすると、きれいな因数分解（factorisation）ではなく、扱いにくい 4 次方程式（quartic）が残ってしまう。
- P が O より高い位置で離れるから $\cos\theta > 0$ であることに触れずに、$1 - 4\sin^2\theta < 0$ の両辺を割ってしまう。

STEP のその先へ

$t = 0$ での三重解は、**接触**（*osculation*）についての主張である。放物線と円は離れる点で接線と曲率を共有しており、したがって 2 次の接触をしている。曲率と接触円（osculating circle）は曲線の微分幾何学（differential geometry）の中心的な概念であり、力学においても、加速度を接線成分と法線成分に分解するたびに再び現れる。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、極座標（polar coordinates）による運動の記述や、この種の束縛運動（constrained motion）を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。