解答例

STEP III 1990、第 12 問

力学 ・ 動く楔上の質点

STEP III 1990、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s3-q12

鍵となる考え方

粒子が滑っている間、二つの量が保存される。水平方向の運動量（momentum）（台は滑らかなので、水平方向の外力ははたらかない）と、エネルギー（energy）（すべての面が滑らか）である。この二つの法則と、粒子は常にくさびに対して面 AC に沿って動くという事実とを合わせると、すべての速度が決まる。その後の跳ね返りと飛行は、くさびが一定の速さで動き続ける間の、単なる放物運動（projectile motion）である。

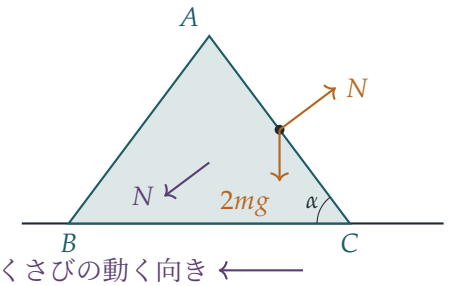
解答

設定

粒子を質量 $2m$ の質点とし、くさび（wedge）を質量 m の剛体として扱う。すべての接触は滑らかである。A, B, C を通る鉛直断面で考える。B を原点にとり、$C = (6a, 0)$、$A = (3a, 4a)$ とする。三角形は $AB = AC = 5a$、底辺の半分が $3a$ の二等辺三角形なので、A の高さは $4a$ である。角 ACB を α とおく。すると

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}, \qquad \cos\alpha = \frac{3}{5}.$$

粒子は AC を x 軸の正の向きに滑り下り、くさびは x 軸の負の向きに押し戻される。



AC に沿って下向きの、**くさびに対する**粒子の速さを u とする。くさびの速度を V とし、これは水平である。粒子の速度は、くさびの速度とくさびに対する粒子の相対速度（relative velocity）の和である：

$$\mathbf{v}_P = \big(V + u\cos\alpha,\ -u\sin\alpha\big) = \big(V + \tfrac{3}{5}u,\ -\tfrac{4}{5}u\big).$$

滑っている間の運動量とエネルギー

外力は重力と台からの鉛直な抗力だけなので、水平方向の運動量は保存される。はじめは 0 なので

$$2m\big(V + \tfrac{3}{5}u\big) + mV = 0 \quad\Longrightarrow\quad V = -\tfrac{2}{5}u.$$

したがって粒子の速度は $\big(\frac{1}{5}u, -\frac{4}{5}u\big)$、くさびの速度は $-\frac{2}{5}u$ である。

> **考えてみよう** なぜ粒子だけについてエネルギー保存を考えてはいけないのだろうか。

粒子にはたらく垂直抗力（normal reaction）は面 AC に垂直であるが、その面自体が動いている。そのため粒子の実際の速度は AC に沿っておらず、N は粒子に仕事をする。エネルギーが保存されるのは**系**全体だけであり、それは一対の垂直抗力がする仕事の合計が 0 になるからである。

粒子が AC の下端に達するまでに落下する高さは $4a$ である。系全体のエネルギーから

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(2m)\Big(\tfrac{1}{25} + \tfrac{16}{25}\Big)u^2 + \tfrac{1}{2}m\cdot\tfrac{4}{25}u^2 &= 2mg\cdot 4a\\ \tfrac{19}{25}u^2 &= 8ga\\ u^2 &= \frac{200ga}{19}.\end{aligned}$$

粒子は終始面から離れない。加速度を用いて力を分解すると、垂直抗力は一定値 $N = \frac{10}{19}mg > 0$ となることがわかる。

衝突の瞬間の位置関係

運動量は常に 0 なので、系の重心（centre of mass）は水平方向に動かない。粒子が台に達するまでに、粒子が水平に x_P、くさびが水平に x_W だけ動くとする。すると $2m\,x_P + m\,x_W = 0$ である。くさびに対して粒子は A から C まで、水平距離にして $3a$ だけ進んだので、$x_P - x_W = 3a$ である。よって

$$x_P = a, \qquad x_W = -2a.$$

その瞬間、粒子は $x = 3a + a = 4a$ にあり、角 C は $6a - 2a = 4a$ にある。粒子はちょうど C に達したところなので、当然ながら両者は同じ位置にある。

跳ね返りと飛行

台は固定されていて滑らかであり、衝突は完全弾性衝突（perfectly elastic）である。したがって粒子の水平方向の速度は変わらず、鉛直方向の速度は向きが逆になる。粒子は速度 $\left(\frac{1}{5}u,\ \frac{4}{5}u\right)$ で台を離れる。再び台に戻るまでの飛行時間は

$$T = \frac{2 \cdot \frac{4}{5}u}{g} = \frac{8u}{5g}.$$

飛行中、粒子は右向きに水平距離 $\frac{1}{5}u \cdot T = \dfrac{8u^2}{25g}$ だけ進む。

粒子が離れた後、くさびには水平方向の力がはたらかないので、くさびは左向きに速さ $\frac{2}{5}u$ で動き続ける。時間 T の間にくさびは $\frac{2}{5}u \cdot T = \dfrac{16u^2}{25g}$ だけ動く。粒子は右へ、くさびは左へ動いているので、粒子が再びくさびに当たることはない。

両者はともに $x = 4a$ から出発して互いに逆向きに動いたので、D と E の距離はこの二つの距離の和である：

$$DE = \frac{8u^2}{25g} + \frac{16u^2}{25g} = \frac{24u^2}{25g} = \frac{24}{25} \cdot \frac{200a}{19} = \frac{192}{19}\,a,$$

これで示された。

検算

- 衝突時の運動エネルギーの合計：$\frac{19}{25}mu^2 = \frac{19}{25} \cdot \frac{200}{19}mga = 8mga$。これは失われた位置エネルギーに等しい。
- 運動量：$2m \cdot \frac{1}{5}u + m \cdot \left(-\frac{2}{5}u\right) = 0$。
- $a = g = m = 1$ として運動を数値的に追跡すると $DE \approx 10.1053$ となり、$\frac{192}{19} = 10.10526\ldots$ である。

よくある間違い

- 粒子の速度が AC に沿っているとしてしまう。それは動いているくさびに対する速度にすぎない。
- 粒子だけについて $\frac{1}{2}(2m)u^2 = 2mg \cdot 4a$ と書いてしまう。これはくさびの運動エネルギーと N がする仕事を無視している。
- DE を、その瞬間に粒子と C がともにある衝突点 $x = 4a$ からではなく、C のもとの位置から測ってしまう。

STEP のその先へ

滑らかな台の上を滑るくさびは、**束縛**（constraints）のある系の典型例である。ラグランジュ（Lagrange）力学では、束縛力がまったく現れないように座標（ここでは、くさびの位置と、粒子が斜面に沿って下った距離）を選ぶことで、このような系を扱う。そのとき、水平方向の運動量の保存は、水平方向の平行移動に対する問題の対称性から導かれる。これはネーターの定理（Noether's theorem）の一例である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、運動する座標系と多体系における運動量保存が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。