解答例

# STEP III 1990、第 11 問

力学 ・ 剛体の回転

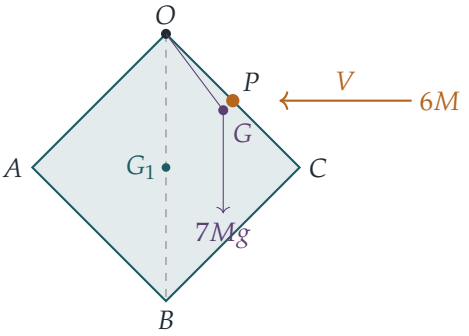
> **STEP III 1990、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q11

## 鍵となる考え方

衝突は瞬間的であり、その間に点 $O$ の軸は大きな撃力を及ぼすので、運動量（linear momentum）は保存**されない**。しかし、その力積（impulse）は $O$ に作用するので、$O$ のまわりのモーメントをもたない。したがって、軸のまわりの角運動量（angular momentum）は衝突の前後で保存される。衝突後の系は固定軸のまわりを回転する剛体（rigid body）であり、仕事をする力は重力だけなので、最上点を越えられるかどうかはエネルギー保存則（conservation of energy）によって判定できる。

## 解答

薄板（lamina）を一様な剛体の正方形、粒子を衝突の瞬間に薄板に付着する質点、軸をなめらかなものとしてモデル化する。$O$ を原点とする。$OB$ が鉛直下向きのとき、正方形の中心 $G_1$ の深さは $\sqrt{2}\,a$（対角線 $2\sqrt{2}\,a$ の半分）であり、$A$ と $C$ は $OB$ の両側に水平距離 $\sqrt{2}\,a$ の位置にあって、深さはやはり $\sqrt{2}\,a$ である。したがって、$OC$ の中点 $P$ は $O$ から水平距離 $a/\sqrt{2}$、深さ $a/\sqrt{2}$ の位置にあり、$OP = a$ である。




（図では粒子が右から飛んでくる場合を示している。後で見るように、左から飛んでくる場合も同じ答えになる。）

### 軸のまわりの慣性モーメント

一辺 $2a$ の一様な正方形の薄板について、中心を通り板に垂直な軸のまわりの慣性モーメント（moment of inertia）は $\frac{1}{12}M((2a)^2+(2a)^2)=\frac{2}{3}Ma^2$ である（直交軸の定理（perpendicular axis theorem）により、板の面内にある 2 本の軸のまわりの慣性モーメント、それぞれ $\frac{1}{3}Ma^2$、を足し合わせればよい）。平行軸の定理（parallel axis theorem）により、$OG_1=\sqrt{2}\,a$ であるから

$$I_{\text{薄板}}=\tfrac{2}{3}Ma^2+M(\sqrt{2}\,a)^2=\tfrac{8}{3}Ma^2.$$

粒子は最終的に $O$ から距離 $a$ の点 $P$ に位置するので、合わせた物体については

$$I=\tfrac{8}{3}Ma^2+6Ma^2=\tfrac{26}{3}Ma^2.$$

### 衝突

**考えてみよう** なぜ衝突に運動量保存則を使えないのだろうか？

軸が固定されているからである。$O$ を動かさないためには、軸は衝突の間に薄板へ力積を与えなければならず、その力積は未知である。しかし、その作用線は $O$ を通るので $O$ のまわりのモーメントは 0 であり、また重力は一瞬の間には力積を与えない。したがって、軸のまわりの角運動量は保存される。

衝突の直前、$O$ のまわりの粒子の角運動量は、運動量 $6MV$ に、$O$ から粒子の（水平な）運動の直線までの垂直距離、すなわち $P$ の深さ $a/\sqrt{2}$ を掛けたものである。薄板は静止している。衝突の直後には物体全体が角速度 $\omega$ で回転するので

$$\tfrac{26}{3}Ma^2\,\omega=6MV\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\qquad\Longrightarrow\qquad\omega=\frac{9V}{13\sqrt{2}\,a}.$$

よって、衝突直後の運動エネルギーは

$$\tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{26}{3}Ma^2\cdot\frac{81V^2}{338a^2} = \frac{27}{26}MV^2.$$

### 完全に回転するための条件

合わせた物体の重心（centre of mass）$G$（質量 $7M$）の $O$ からの水平変位と深さは

$$\frac{M\cdot 0 + 6M\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}}{7M} = \frac{3\sqrt{2}}{7}a, \qquad \frac{M\cdot\sqrt{2}\,a + 6M\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}}{7M} = \frac{4\sqrt{2}}{7}a,$$

であるから、$OG = \frac{\sqrt{2}}{7}a\sqrt{3^2+4^2} = \frac{5\sqrt{2}}{7}a$ である。

物体は剛体で $O$ にピン留めされているので、（糸につながれた粒子とは異なり）円軌道から「外れる」ことはない。物体が完全に回転するのは、位置エネルギーが最大となる位置、すなわち $G$ が $O$ の真上にくる位置で、運動エネルギーがまだ正であるときであり、かつそのときに限る。$G$ は、はじめの $O$ の下 $\frac{4\sqrt{2}}{7}a$ の深さから $O$ の上 $\frac{5\sqrt{2}}{7}a$ の高さまで

$$\frac{4\sqrt{2}}{7}a + \frac{5\sqrt{2}}{7}a = \frac{9\sqrt{2}}{7}a,$$

だけ上昇する。これは物体がどちら向きに回転しても同じなので、粒子がどちらから飛んできたかは関係ない。衝突後に仕事をするのは重力だけである（なめらかな軸は仕事をしない）から、エネルギー保存則により

$$\frac{27}{26}MV^2 > 7Mg\cdot\frac{9\sqrt{2}}{7}a = 9\sqrt{2}\,Mga,$$

が必要であり、すなわち

$$\boxed{V^2 > \frac{26\sqrt{2}}{3}ga.}$$

問題に現れる質量はすべて $M$ の倍数であるから、当然ながら質量 $M$ は約分されて消える。（ちょうど等号が成り立つ場合には、物体は最上点の位置にじわじわと近づくだけで決してそこを通過しないので、不等号は厳密である。）

## 検算

- 慣性モーメント、重心（鉛直下向きからの角度の tan は $\frac{3}{4}$）、運動エネルギーの係数 $\frac{27}{26}$ はいずれも数値的に確認した。慣性モーメントは、傾いた正方形上の格子で積分して確かめた。
- 運動方程式 $I\ddot{\theta} = -7Mg\,x_G$ を $a = 1.3$、$g = 9.81$ として数値的に解いた。$V^2$ を $\frac{26\sqrt{2}}{3}ga \approx 15.6$ の 98% にすると物体は振り戻り、102% にすると一回転した。これはどちらの向きから粒子が飛んできた場合も同様であった。

- エネルギーについての妥当性の確認：粒子のもつ $3MV^2$ のうち、衝突後に残るのは $\frac{27}{26}MV^2$ だけであり、これは完全非弾性衝突（perfectly inelastic collision）として予想どおりである。

## よくある間違い

- 衝突の前後で運動量を保存させてしまう。軸が力積を与えるので、運動量は保存されない。
- 粒子の運動量の腕の長さとして、運動の直線までの垂直距離 $a/\sqrt{2}$ ではなく、距離 $OP = a$ を使ってしまう。
- 粒子が付着すると重心が $OB$ 上から外れることを忘れ、最上点までの上昇量を単純にはじめの深さの 2 倍としてしまう。

## STEP のその先へ

これは固定軸のまわりを回転する剛体の力学であり、そこでは軸での撃力的な反力のために、衝突において保存される量は運動量ではなく角運動量となる。興味深い発展として**打撃の中心**（centre of percussion）がある。これは、打撃を加えても軸に撃力的な反力がまったく生じない点のことであり、クリケットのバットに「スイートスポット」があるのはこのためである。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の回転と角力積を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。