解答例

STEP III 1990、第 10 問

純粋数学 • 解と漸近近似

STEP III 1990、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s3-q10

鍵となる考え方

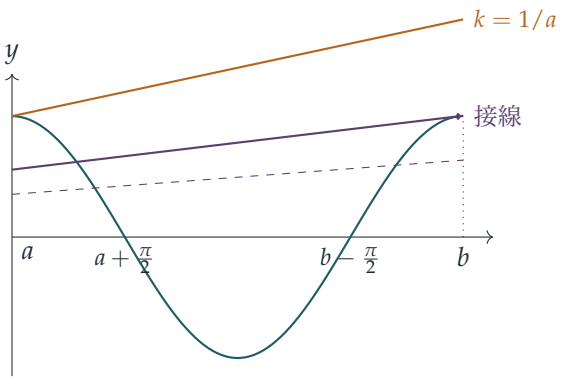
与えられた区間において、$\sin x$ はちょうど 1 周期（period）分を動き、山の頂点で始まり山の頂点で終わる。一方、直線 $y = kx$ は正の値をとり、ゆっくりと増加する。根（root）が存在しうるのは $\sin x > 0$ となる場所に限られ、そのような場所は 2 つの離れた部分からなる。一方は $\sin x$ が減少する部分（交点は高々 1 個）、もう一方は増加していて上に凸（concave）な部分（交点は高々 2 個）である。興味深い境界となるのは直線が 2 つ目の山にちょうど接する（tangent）場合であり、接点を区間の右端から左へ小さな距離 δ だけ離れた点として表すと、接する条件が与えられた方程式になる。

解答

以下では一貫して

$$a = (4n+1)\frac{\pi}{2}, \qquad b = (4n+5)\frac{\pi}{2} = a + 2\pi,$$

とおく。したがって区間は $a < x < b$ である。$\sin a = \sin b = 1$ であるから、$\sin x$ のグラフは山の頂点から始まり、$x = a + \frac{\pi}{2}$ で 0 まで下がり、$x = a + \frac{3\pi}{2} = b - \frac{\pi}{2}$ までは負であり、その後 b で再び山の頂点まで上がる。



図（$n = 1$ の場合を縮尺どおりに描いたもので、原点ははるか左にある）では、$\sin x$ をティール色で、$(a, 1)$ を通る直線をアンバー色で、接線をプラム色の実線で、そして曲線と 3 回交わるより傾きの緩やかな直線を破線で示している。

根の個数としてありうる値

$k > 0$ かつ $x > 0$ より $kx > 0$ であるから、すべての根は $\sin x > 0$ となる場所、すなわち $I_1 = (a, a + \frac{\pi}{2})$ または $I_2 = (b - \frac{\pi}{2}, b)$ のいずれかにある。

I_1 上について。 ここでは $\sin x$ は狭義単調減少（strictly decreasing）、kx は狭義単調増加であるから、$kx - \sin x$ は狭義単調増加であり、根は高々 1 個である。右端では $kx - \sin x > 0$ であり、$x = a$ ではその値は $ka - 1$ に等しい。よって $ka < 1$ ならば I_1 にちょうど 1 個の根があり、$ka \geq 1$ ならば根はない（このとき区間全体で $kx - \sin x > 0$ となる）。

I_2 上について。 $f(x) = \sin x - kx$ とおく。ここでは $f''(x) = -\sin x < 0$ であるから、f は上に凸であり、I_2 上の零点（zero）は高々 2 個である。また左端で $f < 0$ であり、$f(b) = 1 - kb$ である。

- $kb < 1$ ならば、f は負から正へ変化する。上に凸な関数が増加しながら符号を変えるのは 1 回だけであるから、根はちょうど 1 個である。$kb = 1$ のときも同様である。このとき $f(b) = 0$ かつ $f'(b) = \cos b - k = -k < 0$ であるから、b のすぐ左で $f > 0$ となり、I_2 の内部に根が 1 個ある（b 自身での零点は除外される）。
- $kb > 1$ ならば両端で $f < 0$ であるから、I_2 上での f の最大値が負、零、正のいずれであるかに応じて、根は 0 個、1 個、2 個となる。最大値が 0 となるのが接する場合であり、このとき直線はある点 $t \in I_2$ で山に接する。その傾きを k_t とする。k を大きな値から減少させると直線は下がっていくので、$k > k_t$ のとき根はなく、$k = k_t$ のとき 1 個、$\frac{1}{b} < k < k_t$ のとき 2 個である。

接点では $k_t t = \sin t < 1$ かつ $t > a$ であるから $k_t < 1/a$ である。また接する場合は

$kb > 1$ であるから $k_t > 1/b$ である。2 つの部分を合わせると次のようになる。

k の範囲	I_1 内の根	I_2 内の根	合計
$k \leq 1/b$	1	1	2
$1/b < k < k_t$	1	2	3
$k = k_t$	1	1	2
$k_t < k < 1/a$	1	0	1
$k \geq 1/a$	0	0	0

よって、題意のとおり、方程式はこの区間に 0 個、1 個、2 個、3 個のいずれかの個数の根をもちうる。

根がちょうど 1 個の場合

表より、根がちょうど 1 個となるのは $k_t < k < \dfrac{1}{a} = \dfrac{2}{(4n+1)\pi}$ のとき、かつそのときに限る。あとは k_t を記述すればよい。

考えてみよう　「直線が曲線に接する」ことを、どのように方程式に書き直せばよいだろうか？

直線 $y = kx$ が $x = t$ で $y = \sin x$ に接するのは、2 つのグラフがそこで交わり、**かつ**傾きが等しいときである。

$$\sin t = k_t t, \qquad \cos t = k_t.$$

点 t は I_2 にあるので、$t = b - \delta$（ただし $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$）と書く。$\sin b = 1$ かつ $\cos b = 0$ であるから、

$$\sin t = \sin(b-\delta) = \cos\delta, \qquad \cos t = \cos(b-\delta) = \sin\delta.$$

よって傾きの条件から $k_t = \sin\delta$ が得られ、交わる条件は次のようになる。

$$\cos\delta = \left((4n+5)\frac{\pi}{2} - \delta\right)\sin\delta.$$

したがって、根がちょうど 1 個となるのは

$$\sin\delta < k < \frac{2}{(4n+1)\pi},$$

のときである。ここで δ は上で述べたものであり、これが示すべきことであった。

n が大きいときの近似

δ の方程式を $\sin\delta$ で割る（$0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ であるから零ではない）。

$$\cot\delta = b - \delta, \qquad \text{すなわち} \qquad \tan\delta = \frac{1}{b-\delta}.$$

$\delta < \frac{\pi}{2}$ であるから、右辺は $1/(b - \frac{\pi}{2})$ より小さく、これは n が大きいとき小さい。よって δ は小さく、$\tan\delta \approx \delta$ かつ $b - \delta \approx b$ であるから、次を得る。

$$\delta \approx \frac{1}{b} = \frac{2}{(4n+5)\pi}.$$

次の近似を得るために、$\delta = \dfrac{1}{b} + \dfrac{c}{b^3}$ とおき、両辺で b^{-3} までの項を残す。左辺は $\tan\delta = \delta + \frac{1}{3}\delta^3 + \cdots = \dfrac{1}{b} + \dfrac{c + \frac{1}{3}}{b^3} + \cdots$ である。右辺は

$$\frac{1}{b-\delta} = \frac{1}{b}\left(1 - \frac{\delta}{b}\right)^{-1} = \frac{1}{b}\left(1 + \frac{\delta}{b} + \cdots\right) = \frac{1}{b} + \frac{1}{b^3} + \cdots,$$

となる。ここで補正項では $\delta \approx 1/b$ を用いた。b^{-3} の項を比較すると $c + \frac{1}{3} = 1$ となるので、$c = \frac{2}{3}$ であり、

$$\delta \approx \frac{1}{b} + \frac{2}{3b^3} = \frac{2}{(4n+5)\pi} + \frac{16}{3(4n+5)^3\pi^3}.$$

（同値な方法として、反復（iteration）$\delta \mapsto \arctan\dfrac{1}{b-\delta}$ を $\delta = 1/b$ から出発して 1 回行うと $\arctan\dfrac{b}{b^2-1}$ が得られ、これも同じ展開をもつ。）したがって、k の区間の下端は $\sin\delta \approx \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{2b^3}$ である。

検算

- $n = 1$ のとき、$\cos\delta = (\frac{9\pi}{2} - \delta)\sin\delta$ を数値的に解くと $\delta = 0.070973$ となる。一方 $1/b = 0.070736$、$1/b + 2/(3b^3) = 0.070971$ であり、改良した近似は約 150 倍正確である。$n = 10$ では誤差は約 5×10^{-10} まで小さくなる。
- $n = 1, 2, 3, 5$ と表の各行から選んだ k の値について、細かい格子上で $kx - \sin x$ の符号変化を数えると、予想どおり $2, 3, 1, 0$ 個の根が得られる。また $\sin\delta$ と $2/((4n+1)\pi)$ の間でランダムに選んだ k に対しては、常に根は 1 個である。

よくある間違い

- 接する場合を忘れたり、$1/b$、k_t、$1/a$ の大小関係を誤ったりすること。これにより根の個数の数え上げが混乱する。
- 2 番目の近似で $\tan\delta \approx \delta$ だけを用いること。これでは $\delta \approx b/(b^2-1) \approx 1/b + 1/b^3$ となってしまう。$\frac{1}{3}\delta^3$ の項は $\tan\delta$ の展開に含まれるもので、補正項と同じオーダーであるから、残しておかなければならない。

STEP のその先へ

小さいまたは大きいパラメータを含む方程式の根に対して、次々とよりよい近似を求めることは**漸近解析**（asymptotic analysis）とよばれる。ここで行ったのとまったく同様に、$1/b$ のべきによる級数を代入して係数を比較するのである。同じ考え方を $\tan x = x$ に適用すると、この方程式の大きな根を記述でき、それらは熱伝導や振動の問題に現れる。このような展開の背後にある解析についてさらに知りたければ、Bartle と Sherbert による *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）を参照するとよい。また Siklos による *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題）には、STEP 形式の演習問題がさらに収録されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。