解答例

STEP III 1990、第 1 問

純粋数学 ・ 倍角と多項式の根

> **STEP III 1990、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s3-q1

鍵となる考え方

9 は 3×3 であるから、正接の三倍角の公式（triple-angle formula）を 2 回用いれば $\tan 9\theta$ が得られる。これは $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^9$ を展開するよりもはるかに手間が少ない。さらに、因数分解（factorisation）された形から、$\theta = \pi/9, 2\pi/9, 4\pi/9$ でどの因数が 0 になるかもわかる。これらはちょうど $\tan^2 3\theta = 3$ となる角である。これにより $u = \tan^2\theta$ についての三次方程式（cubic）が得られ、あとはヴィエトの公式（Vieta's formulas、多項式の解と係数の関係）がすべてを片づけてくれる。

解答

$\tan 9\theta$ の公式

$t = \tan\theta$、$T = \tan 3\theta$ とおく。三倍角の公式は $\tan(2\theta + \theta)$ からも、$n = 3$ としたド・モアブル（de Moivre）の定理からも得られ、

$$T = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2} = \frac{t(t^2 - 3)}{3t^2 - 1}, \qquad \tan 9\theta = \frac{3T - T^3}{1 - 3T^2} = \frac{T(3 - T^2)}{1 - 3T^2}.$$

となる。ここで $3-T^2$ と $1-3T^2$ を共通の分母 $(1-3t^2)^2$ で表す。

$$\begin{aligned}(1-3t^2)^2(3-T^2) &= 3(1-3t^2)^2 - t^2(3-t^2)^2\\ &= (3-18t^2+27t^4) - (9t^2-6t^4+t^6)\\ &= -(t^6-33t^4+27t^2-3),\\ (1-3t^2)^2(1-3T^2) &= (1-3t^2)^2 - 3t^2(3-t^2)^2\\ &= (1-6t^2+9t^4) - (27t^2-18t^4+3t^6)\\ &= -(3t^6-27t^4+33t^2-1).\end{aligned}$$

比をとると因数 $-(1-3t^2)^{-2}$ は約分されるので、

$$\tan 9\theta = \frac{t(t^2-3)}{3t^2-1}\cdot\frac{t^6-33t^4+27t^2-3}{3t^6-27t^4+33t^2-1},$$

となり、これが求める結果である。

代わりにド・モアブルの定理を用いると、$\tan 9\theta = \operatorname{Im}(1+\mathrm{i}t)^9 / \operatorname{Re}(1+\mathrm{i}t)^9$ である。この場合は、

$$9t-84t^3+126t^5-36t^7+t^9 \quad \text{と} \quad 1-36t^2+126t^4-84t^6+9t^8$$

がそれぞれ上の分子と分母のように因数分解されることを確かめなければならない。実際そうなるのだが、$\tan 3\theta$ を経由する方法なら因数分解がおのずと手に入る。

三次方程式

$P(t) = t^6-33t^4+27t^2-3$ とおく。上の最初の計算から

$$3-\tan^2 3\theta = -\frac{P(t)}{(1-3t^2)^2} \qquad \text{ただし} 3t^2 \neq 1.$$

が成り立つ。ここで $\theta = \pi/9,\ 2\pi/9,\ 4\pi/9$ とする。すると $3\theta = \pi/3,\ 2\pi/3,\ 4\pi/3$ であり、いずれの場合も $\tan 3\theta = \pm\sqrt{3}$、したがって $\tan^2 3\theta = 3$ である。また、いずれの場合も 3θ は $\pi/6$ の奇数倍ではないので、$3t^2 \neq 1$ である（そうでなければ $\tan 3\theta$ が定義されない）。よって、3 つの角すべてについて $P(\tan\theta) = 0$ である。

これらはちょうど、$(0, \pi/2)$ の中で、t や t^2-3 ではなく因数 P によって $\tan 9\theta = 0$ となる角である。実際、$t \neq 0$ であり、また $\theta \neq \pi/3$ であるから $t^2 \neq 3$ である。

> **考えてみよう** この 3 つの数が三次方程式の解の**すべて**であり、重解がないことはどうしてわかるだろうか。

$u = t^2$ とおく。$\tan^2(\pi/9)$、$\tan^2(2\pi/9)$、$\tan^2(4\pi/9)$ はいずれも

$$u^3-33u^2+27u-3 = 0.$$

の解（root）である。tan は $(0, \pi/2)$ で正かつ狭義単調増加であり、$\pi/9 < 2\pi/9 < 4\pi/9 < \pi/2$ であるから、これら 3 つの値は相異なる。三次方程式の解は高々 3 個であるから、これらがちょうどその解である。これが求める整数係数の三次方程式である。

積

ヴィエトの公式により、$u^3 - 33u^2 + 27u - 3$ の解の積は 3 である。

$$\tan^2\left(\tfrac{\pi}{9}\right)\tan^2\left(\tfrac{2\pi}{9}\right)\tan^2\left(\tfrac{4\pi}{9}\right) = 3.$$

3 つの角はすべて $(0, \pi/2)$ にあるので、各正接は正であり、正の平方根をとる。

$$\tan\left(\tfrac{\pi}{9}\right)\tan\left(\tfrac{2\pi}{9}\right)\tan\left(\tfrac{4\pi}{9}\right) = \sqrt{3}.$$

6 乗の和

解を u_1, u_2, u_3 とする。三次方程式から

$$e_1 = u_1 + u_2 + u_3 = 33, \qquad e_2 = u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 = 27, \qquad e_3 = u_1u_2u_3 = 3.$$

である。求めたいのは $u_1^3 + u_2^3 + u_3^3$ であり、これは正接の 6 乗の和にほかならない。

> **考えてみよう** 解を求めずに、e_1, e_2, e_3 から 3 乗の和を得るにはどうすればよいだろうか。

各解は $u_i^3 = 33u_i^2 - 27u_i + 3$ を満たす。この 3 つの等式を足し合わせると

$$\sum u_i^3 = 33\sum u_i^2 - 27\sum u_i + 9.$$

となる。ここで $\sum u_i = 33$ であり、

$$\sum u_i^2 = e_1^2 - 2e_2 = 1089 - 54 = 1035.$$

である。したがって

$$\begin{aligned}\sum u_i^3 &= 33 \times 1035 - 27 \times 33 + 9\\ &= 34155 - 891 + 9\\ &= 33273.\end{aligned}$$

すなわち

$$\tan^6\left(\tfrac{\pi}{9}\right) + \tan^6\left(\tfrac{2\pi}{9}\right) + \tan^6\left(\tfrac{4\pi}{9}\right) = 33273,$$

となり、示すべきことが示された。同じことであるが、$\sum u_i^3 = e_1^3 - 3e_1e_2 + 3e_3 = 35937 - 2673 + 9$ としてもよい。

検算

- 数値的には、$\tan^2(\pi/9) \approx 0.1325$、$\tan^2(2\pi/9) \approx 0.7041$、$\tan^2(4\pi/9) \approx 32.163$ である。これらの和は 33.000、積は 3.000 である。
- 3 つの正接の積は $1.7320508\ldots = \sqrt{3}$ である。
- 上の 3 つの値の 3 乗の和は 33273.0 である。そのほとんどは $\tan^6(4\pi/9) \approx 33272.4$ によるものである。
- $\tan 9\theta$ の公式は、数千個のランダムな θ の値において、電卓の値と有効数字約 12 桁まで一致する。
- 簡単な場合：$t = 1$、すなわち $\theta = \pi/4$ とする。公式から $\frac{1\cdot(-2)(-8)}{2\cdot 8} = 1 = \tan(9\pi/4)$ が得られる。

よくある間違い

- 六次式（sextic）の因数が 0 になると結論する前に、$3t^2 \neq 1$（すなわち分母が 0 でないこと）を確かめるのを忘れる。
- 積として $-\sqrt{3}$ をとってしまう。どの角も鋭角であるから、どの正接も正である。
- $+3e_3$ の項を落として $\sum u_i^3 = e_1^3 - 3e_1e_2$ と書いてしまう。こうすると 33264 になる。

STEP のその先へ

三次式 $u^3 - 33u^2 + 27u - 3$ は有理数解をもたないので、$\mathbb{Q}$ 上既約（irreducible）である。また、この三次式は 3 つの実数解をもつ。ガロア理論（Galois theory）によれば、このような三次式の解は実数の冪根（radicals）だけを用いて表すことができない（**還元不能の場合**（casus irreducibilis））。$\tan^2(\pi/9)$ のような三角関数による表示がそれらを書き表す自然な方法であるのはそのためである。解の冪乗の和は、一般にニュートンの恒等式（Newton's identities）によって支配される。ド・モアブルの定理の幾何学的な側面については、Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）を読むとよい。代数的な側面については、Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を読むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。