解答例

STEP II 1990、第 9 問

純粋数学 • 極方程式の曲線と弧長

> **STEP II 1990、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q9

鍵となる考え方

2 つの曲線はどちらも r を θ の式として与えられているので、半直線ごとに比較すればよい。原点から出る各半直線（half-line）上に放物線（parabola）の点はちょうど 1 つあり、それはカージオイド（cardioid）の内側か外側のどちらかにある。これにより、放物線がどこでカージオイドに入り、どこで出るかがただちにわかる。長さについては、カージオイドは極座標（polar coordinates）の形のまま扱うのがよく（弧長（arc length）の被積分関数が半角の公式（half-angle identity）によって簡単になる）、一方で放物線は直交座標の形で扱うほうがはるかに易しい。

解答

2 つの曲線

放物線については、$r + r\cos\theta = 1$ は $r = 1 - x$ を意味する。両辺を 2 乗すると $x^2 + y^2 = (1-x)^2$ となるので、

$$y^2 = 1 - 2x.$$

これは焦点（focus）が原点、頂点（vertex）が $(\frac{1}{2}, 0)$ で、左向きに開いた放物線である。原点はその凹側、すなわち $y^2 < 1 - 2x$ となる側にある。この側を放物線の内側とよぶことにする。

カージオイド $r = 4(1 + \cos\theta)$ は原点に尖点（cusp）をもち（$\theta = \pi$ のとき）、$\theta = 0$ のとき $x = 8$ に達する。

2 曲線の交わり

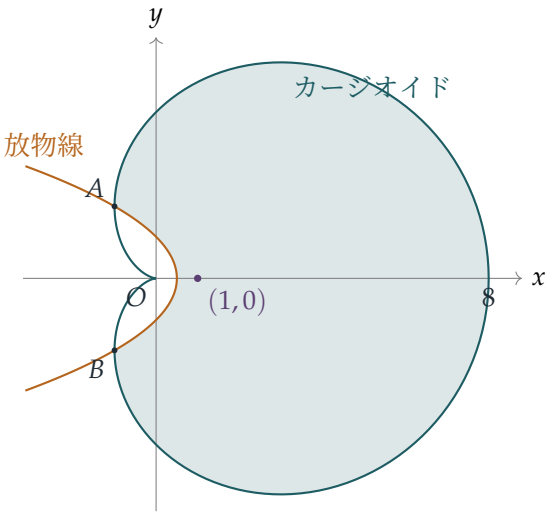
$-\pi < \theta < \pi$ を満たす方向 θ を固定する。このとき $1+\cos\theta > 0$ である。この半直線上で、放物線は距離 $1/(1+\cos\theta)$ の位置にあり、カージオイドの境界は距離 $4(1+\cos\theta)$ の位置にある。また、カージオイドの内部は、この半直線のうち境界より手前の部分である。したがって、放物線上の点がカージオイドの内側にあるのは、ちょうど

$$\frac{1}{1+\cos\theta} < 4(1+\cos\theta) \iff (1+\cos\theta)^2 > \tfrac{1}{4} \iff \cos\theta > -\tfrac{1}{2} \iff |\theta| < \tfrac{2\pi}{3},$$

のときである。ここで、正の量 $1+\cos\theta$ を掛け、正の平方根をとった。等号は $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$ で成り立ち、このとき $r = 2$ であるから、2 つの交点

$$A = (-1, \sqrt{3}), \qquad B = (-1, -\sqrt{3}).$$

が得られる。よって、放物線は B から頂点 $(\frac{1}{2}, 0)$ を通って A に至る途切れのない 1 本の弧に沿ってカージオイドの内側にあり、それ以外ではすべて外側にある。この 1 本の弧はカージオイドの境界上の 2 点を結ぶので、内部を 2 つの部分に分ける。1 つは放物線の内側の部分（原点を含み、尖点付近のカージオイドの小さなループで囲まれる）、もう 1 つは放物線の外側の部分（カージオイドの大きな外側の弧で囲まれる）である。



（図からも見てとれる面白い事実がある。$x = 4(1+\cos\theta)\cos\theta = (2\cos\theta+1)^2 - 1 \geq -1$ であるから、A と B はカージオイドの最も左にある点でもある。）

境界の長さ

$r = 1$、$\theta = 0$ の点は $(1,0)$ である。この点はカージオイドの内側にあり（$1 < 8$）、放物線の外側にある（$0^2 > 1 - 2$）ので、網かけ部分に属する。その境界は、カージオイドの弧 $-\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ と、B から A までの放物線の弧からなる。

カージオイドの弧。 極座標では $\mathrm{d}s = \sqrt{r^2 + (\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$ である。ここでは $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = -4\sin\theta$ であるから、

$$r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = 16(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta) = 32(1 + \cos\theta) = 64\cos^2\tfrac{\theta}{2}.$$

考えてみよう 単純に $\sqrt{64\cos^2(\theta/2)} = 8\cos(\theta/2)$ と書いてよいだろうか？

そう書けるのは、考えている範囲全体で $\cos\frac{\theta}{2} \geq 0$ だからにすぎない。実際、$|\theta| \leq \frac{2\pi}{3}$ のとき $|\frac{\theta}{2}| \leq \frac{\pi}{3}$ である。x 軸に関する対称性を用いると、

$$L_{\text{カージオイド}} = 2\int_0^{2\pi/3} 8\cos\tfrac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 32\left[\sin\tfrac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi/3} = 32\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3}.$$

放物線の弧。 y を媒介変数とする。$x = \frac{1}{2}(1 - y^2)$ であるから $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = -y$、$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y^2}\,\mathrm{d}y$ であり、y は $-\sqrt{3}$ から $\sqrt{3}$ まで動く。対称性より、

$$L_{\text{放物線}} = 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + y^2}\,\mathrm{d}y.$$

$y = \sinh u$、$\mathrm{d}y = \cosh u\,\mathrm{d}u$ とおくと、被積分関数は $\cosh^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2u)$ となるので、

$$\int \sqrt{1 + y^2}\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\sinh 2u = \tfrac{1}{2}(\operatorname{arsinh} y + y\sqrt{1 + y^2}) + C.$$

$y = \sqrt{3}$ のとき $\sqrt{1 + y^2} = 2$、$\operatorname{arsinh}\sqrt{3} = \ln(\sqrt{3} + 2)$ であるから、

$$L_{\text{放物線}} = \left[\operatorname{arsinh} y + y\sqrt{1 + y^2}\right]_0^{\sqrt{3}} = \ln(2 + \sqrt{3}) + 2\sqrt{3}.$$

合計。 これらを加えると、

$$L = 16\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3}) = 18\sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3}),$$

となり、示すべきことが得られた。

検算

- カージオイド全体の長さは $\int_{-\pi}^{\pi} 8\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 32$ であり、用いた外側の弧 $16\sqrt{3} \approx 27.71$ はその大部分を占める。これは図と合っている。尖点付近の小さなループの長さは $32 - 16\sqrt{3} \approx 4.29$ である。
- 放物線の弧は約 4.78 であり、B から頂点 $(\frac{1}{2}, 0)$ を経て A に至る 2 本の線分の長さの合計 $2\sqrt{1.5^2 + 3} \approx 4.58$ より少し長い。当然そうなるべきである。
- 数値的に、両曲線の極座標での弧長の被積分関数を中点則（midpoint rule）による数値積分（quadrature）で計算すると合計 32.49387 となり、$18\sqrt{3} + \ln(2 + \sqrt{3}) \approx 32.49387$ と一致した。

よくある間違い

- 違う部分をとってしまうこと。$(1,0)$ は放物線の外側（頂点 $x=\frac{1}{2}$ より右側）にあるので、その境界にはカージオイドの大きな外側の弧が使われ、尖点付近のループは使われない。
- カージオイドを $8\cos\frac{\theta}{2}$ で 0 から 2π まで一度に積分してしまうこと。この式は $\theta>\pi$ で負になる。正しい被積分関数は $8\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$ である。

STEP のその先へ

2 つの曲線はどちらも、焦点または尖点を極（pole）に置いて表した二次曲線（conics）またはリマソン（limaçon）である。$r=\ell/(1+e\cos\theta)$ は、太陽を焦点に置いたときに軌道力学（orbital mechanics）で二次曲線が現れる形である。弧長の公式 $\int\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\theta$ は媒介変数表示された曲線の長さ $\int|\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$ の特別な場合であり、大学 1 年次のベクトル解析（vector calculus）では、これが曲率（curvature）や線積分（line integrals）へとつながっていく。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、二次曲線の極座標表示を用いてケプラー（Kepler）の軌道を導いている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。