解答例

STEP II 1990、第 8 問

純粋数学 ・ 部分積分

> **STEP II 1990、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q8

鍵となる考え方

この微分方程式（differential equation）の各項は、完全な導関数（exact derivative）であるか、ほぼそうなっている。y と y' は $t=0$ と $t=1$ で同じ値をとるので、それらの完全な導関数を積分すると 0 になる。各関係式は、方程式に適当な関数を掛け、境界項（boundary term）がすべて消えるまで部分積分（integration by parts）を繰り返すことで得られる。境界項を消すのに使える事実を一覧にしておくとよい。すなわち $x(0)=0$、$y(0)=y(1)$、$y'(0)=y'(1)$、そして（証明した後は）$x(1)=0$ である。

解答

第一の等式

$x'=y$ であるから、被積分関数 $xy=xx'$ は $\frac{1}{2}x^2$ の導関数である。よって

$$\int_0^1 x(t)\,y(t)\,\mathrm{d}t=\Big[\tfrac{1}{2}x(t)^2\Big]_0^1=\tfrac{1}{2}[x(1)]^2,$$

となる。ここで $x(0)=\int_0^0 y(u)\,\mathrm{d}u=0$ を用いた。これが求める結果である。

$x(1)=0$ の証明

$(*)$ の中央の項を完全な導関数として書く：

$$(y^2-1)\,y'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\tfrac{1}{3}y^3-y\Big).$$

そこで $(*)$ を 0 から 1 まで項ごとに積分すると

$$\Big[y'\Big]_0^1+\Big[\tfrac{1}{3}y^3-y\Big]_0^1+\int_0^1 y\,\mathrm{d}t=0.$$

第一の括弧は $y'(1) - y'(0) = 0$ であり、第二の括弧は $y(1) = y(0)$ より 0 である。残った積分は x の定義により $x(1)$ である。したがって $x(1) = 0$ である。

関係式 $\int y^2 = \frac{1}{3}\int y^4$

$(*)$ に x を掛けて $[0,1]$ で積分する。積分は三つあるので、一つずつ扱う。

最後の項。第一の等式と $x(1) = 0$ より

$$\int_0^1 x\,y\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}[x(1)]^2 = 0.$$

y'' の項。x を微分する側として部分積分する（$x' = y$ である）：

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,y''\,\mathrm{d}t &= \Big[x\,y'\Big]_0^1 - \int_0^1 y\,y'\,\mathrm{d}t \\ &= x(1)y'(1) - x(0)y'(0) - \Big[\tfrac{1}{2}y^2\Big]_0^1 = 0,\end{aligned}$$

これは $x(1) = x(0) = 0$ かつ $y(1) = y(0)$ による。

> **考えてみよう** $x\,(y^2-1)\,y'$ はどのように部分積分すればよいか。どちらの因子を積分すべきか。

中央の項。因子 $(y^2-1)y'$ を積分し（これが $\frac{1}{3}y^3 - y$ の導関数であることはすでにわかっている）、x を微分する：

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,(y^2-1)\,y'\,\mathrm{d}t &= \Big[x(\tfrac{1}{3}y^3 - y)\Big]_0^1 - \int_0^1 y(\tfrac{1}{3}y^3 - y)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 - \tfrac{1}{3}\int_0^1 y^4\,\mathrm{d}t + \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

x は両端で 0 なので、境界項は消える。

三つの部分を足し合わせると 0 になる：

$$\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}t - \tfrac{1}{3}\int_0^1 y^4\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \text{すなわち} \qquad \int_0^1 [y(t)]^2\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{3}\int_0^1 [y(t)]^4\,\mathrm{d}t,$$

となり、求める結果が得られる。

関係式 $\int y'^2 = \int y^2$

> **考えてみよう** y'^2 の積分を得たい。何を掛ければそれが現れるだろうか。

$y\,y''$ を部分積分すると $-\int y'^2$ が現れるので、今度は $(*)$ に y を掛けて積分する。各項

を順に計算すると

$$\int_0^1 y\,y''\,\mathrm{d}t = \Big[y\,y'\Big]_0^1 - \int_0^1 y'^2\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 y'^2\,\mathrm{d}t,$$
$$\int_0^1 (y^3 - y)\,y'\,\mathrm{d}t = \Big[\tfrac{1}{4}y^4 - \tfrac{1}{2}y^2\Big]_0^1 = 0.$$

境界項 $y(1)y'(1) - y(0)y'(0)$ は、y と y' がともに同じ値に戻るので 0 である。二行目は $y(1) = y(0)$ より 0 となる。残るのは

$$-\int_0^1 y'^2\,\mathrm{d}t + \int_0^1 y^2\,\mathrm{d}t = 0, \qquad \text{よって} \qquad \int_0^1 [y'(t)]^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 [y(t)]^2\,\mathrm{d}t.$$

検算

第一の等式は任意の y について成り立つ。$y = \cos 3t + t^2 - 0.7e^t$ とすると、数値積分（quadrature）により $\int_0^1 xy\,\mathrm{d}t \approx 0.338191$ が得られ、これは $\frac{1}{2}x(1)^2$ に等しい。

時間 1 の後に同じ状態に戻る $(*)$ の非自明な解は存在しない（後述）。しかし、同じ議論は時間 T の後に同じ状態に戻る任意の解について、区間 $[0, T]$ 上でそのまま通用する。$(*)$ を数値的に積分して周期軌道（periodic orbit）に乗せたところ、その周期は $T \approx 6.6633$ であった。一周期にわたって $\int y \approx 10^{-9}$、$\int y^2 \approx 13.72222$、$\frac{1}{3}\int y^4 \approx 13.72222$、$\int y'^2 \approx 13.72228$ が得られ、これらは刻み幅による誤差の範囲内で一致する。

よくある間違い

- 第三の部分で $x(1) = 0$ が必要であることを忘れる。これがなければ、$\int xy$ も境界項も消えない。
- 中央の項で、$(y^2 - 1)y'$ ではなく x を積分してしまう。$x' = y$ を用いることで、積分が y のべきに帰着するのである。
- 境界項が 0 になるのは「$y(0) = 0$ だから」と述べる。そのような条件は与えられていない。境界項が消えるのは、0 と 1 における値が等しいからである。

STEP のその先へ

方程式 $(*)$ はファン・デル・ポール振動子（van der Pol oscillator）であり、自励振動する電気回路の古典的なモデルである。この方程式はただ一つの周期軌道をもち、ここで証明した関係式は一周期にわたるエネルギー収支を表している。これらの関係式からは意外な事実もわかる。$\int_0^1 y = 0$ であるから、フーリエ級数（Fourier series）か

ら得られるウィルティンガー（Wirtinger）の不等式（ポアンカレ（Poincaré）の不等式ともいう）により $\int_0^1 y'^2 \geq 4\pi^2 \int_0^1 y^2$ が成り立つ。これと最後の関係式を合わせると $y \equiv 0$ でなければならない。つまり、時間 1 の後に同じ状態に戻る解は自明な解しかない。真の周期は約 6.66 だからである。周期軌道とリミットサイクル（limit cycle）についてさらに学ぶには、Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（常微分方程式の入門書）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。