解答例

STEP II 1990、第 7 問

純粋数学 ・ 微分方程式

> **STEP II 1990、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q7

鍵となる考え方

指数関数型の試行解（exponential trial solution）を用いると、遅延方程式（delay equation）は p についての通常の方程式に帰着する。時間をずらすことは、e^{pt} に定数を掛けることにすぎないからである。方程式 $(*)$ では p と e^{-p} が混在しているため厳密には解けないが、両辺に e^{p} を掛ければ p への依存をすべて一方の辺にまとめられる。すなわち、根（root）は一本の曲線 $y=(p+1)\mathrm{e}^{p}$ と水平な直線 $y=k$ の交点である。こうして根の個数を数える問題は、一つの曲線を描く問題に帰着する。

解答

p についての方程式

$A\neq 0$ として $\mathrm{f}(t)=A\mathrm{e}^{pt}$ とおく（零でない解を求めたいからである）。すると $\mathrm{f}'(t)=pA\mathrm{e}^{pt}$ かつ $\mathrm{f}(t-1)=A\mathrm{e}^{p(t-1)}=\mathrm{e}^{-p}A\mathrm{e}^{pt}$ であるから、$(\dagger)$ は

$$A\mathrm{e}^{pt}(p+1-k\mathrm{e}^{-p})=0 \quad \text{すべての} t.$$

となる。$A\neq 0$ かつ $\mathrm{e}^{pt}>0$ であるから、これがすべての t で成り立つための必要十分条件は

$$p+1=k\mathrm{e}^{-p},$$

であり、これは $(*)$ にほかならない。したがって、このような解が存在するのは p が $(*)$ の実数解であるときちょうどそのときであり、そのとき A は任意でよい。

実数解はいくつあるか

$(*)$ に $e^p > 0$ を掛けると、同値な方程式

$$g(p) = k, \qquad \text{ただし} g(p) = (p+1)e^p.$$

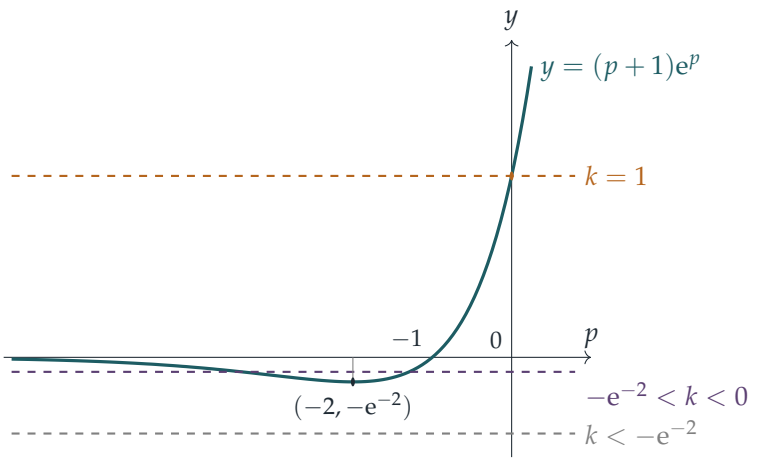
が得られる。よって、曲線 $y = g(p)$ と水平な直線 $y = k$ の交点の個数を数えればよい。

> **考えてみよう** $y = (p+1)e^p$ はどのような形をしているか。どこで最小となり、両端ではどうなるか。

微分すると $g'(p) = e^p + (p+1)e^p = (p+2)e^p$ であり、これは $p < -2$ で負、$p > -2$ で正である。よって g は $(-\infty, -2]$ で減少し、$[-2, \infty)$ で増加し、大域的最小値（global minimum）

$$g(-2) = -e^{-2}.$$

をとる。両端については、$p \to \infty$ のとき $g(p) \to \infty$、$p \to -\infty$ のとき $g(p) \to 0$ である（指数関数的な減衰は一次関数的な増大に勝つ）。$p < -1$ では因子 $p+1$ が負であるから、g は下側から 0 に近づく。曲線が軸と交わるのは $p = -1$ のみであり、また $g(0) = 1$ である。



図から読み取ると次のようになる（上で調べた単調性（monotonicity）により、これは厳密な議論となる）。

- $k > 0$ のとき：$(-\infty, -1]$ では $g \le 0 < k$ であり、$(-1, \infty)$ では g は 0 から ∞ まで狭義単調に増加するから、根は**ちょうど一つ**であり、それは $p > -1$ を満たす。
- $-e^{-2} < k < 0$ のとき：$(-\infty, -2]$ では g は 0 に近い値から $-e^{-2}$ まで狭義単調に減少するから、値 k を一度とる。$[-2, -1]$ では $-e^{-2}$ から 0 まで狭義単調に増加する

から、値 k をもう一度とる。$p > -1$ では $g > 0 > k$ である。よって根は**二つ**あり、一つは $(-\infty, -2)$ に、もう一つは $(-2, -1)$ にある。

- $k = -\mathrm{e}^{-2}$ のとき：直線は曲線の最小点で曲線に接し、**ただ一つ**の根 $p = -2$ を与える。
- $k < -\mathrm{e}^{-2}$ のとき：直線は曲線全体より下にあるから、根は**存在しない**。

以上より、題意のとおり $(*)$ は k に応じて 0 個、1 個または 2 個の実数解をもち、$A\mathrm{e}^{pt}$ の形の解が存在するのは

$$k \geq -\mathrm{e}^{-2}, \quad k \neq 0.$$

のときちょうどそのときである。（値 $k = 0$ は問題文で除外されている。その場合はただ一つの根 $p = -1$ が得られる。）

解が減衰するのはいつか

考えてみよう どのような p に対して $A\mathrm{e}^{pt} \to 0$ となるか。また、$(*)$ を解かずに、根が 0 に対してどこにあるかをどう突き止めればよいか。

$A \neq 0$ のとき、$t \to +\infty$ で $A\mathrm{e}^{pt} \to 0$ となるための必要十分条件は $p < 0$ である。根を具体的に求める必要はなく、根が 0 に対してどちら側にあるかだけがわかればよい。

- $-\mathrm{e}^{-2} \leq k < 0$ ならば、すべての根は $(-\infty, -1)$ にある（実際、$p \geq -1$ では $g \geq 0$ であるから、$g(p) = k < 0$ ならば $p < -1$ でなければならない）。よってこのような解はすべて減衰する。
- $k > 0$ ならば、ただ一つの根は g が狭義単調に増加する範囲にあるから、$p < 0 \iff g(p) < g(0) \iff k < 1$ である。$k = 1$ のとき根は $p = 0$ であり、定数解 $\mathrm{f} = A$ を与えるが、これは零に収束しない。$k > 1$ のとき根は正であり、解は増大する。

したがって、$t \to +\infty$ のとき解が零に収束するのは

$$-\mathrm{e}^{-2} \leq k < 1, \quad k \neq 0.$$

のときちょうどそのときである。

検算

- $k = 1$：$p = 0$ は $0 + 1 = 1 \cdot \mathrm{e}^{0}$ を満たし、$\mathrm{f} = A$ が $\mathrm{f}' + \mathrm{f} - \mathrm{f}(t-1) = 0$ の解であることは明らかである。これは減衰と増大の境目であり、そうなるべきものである。
- $k = -\mathrm{e}^{-2} \approx -0.1353$：$p = -2$ とすると $-1 = -\mathrm{e}^{-2}\mathrm{e}^{2}$ となる。数値的には、

$k = -0.13$ のとき二つの根 $p \approx -2.311$ と $p \approx -1.742$ が -2 の両側に得られ、$k = -0.14$ のときは根が存在しない。

- 物理的な意味：フィードバックがない場合（$k \to 0$）、系は $\mathrm{f}' = -\mathrm{f}$ となり、減衰率は $p = -1$ である。これは $|k|$ が小さいときの根の位置と一致する。強い正のフィードバック（$k > 1$）は減衰に打ち勝ち、解は増大する。

よくある間違い

- $y = p + 1$ と $y = ke^{-p}$ を描いて比べ、$k < 0$ のとき直線が曲線と二回交わることもまったく交わらないこともあるのを見落とす。接する条件（tangency condition）は $g(p) = (p+1)e^{p}$ を用いたほうが見つけやすい。
- 端点 $k = -e^{-2}$ を忘れる。この場合も（重根（repeated root）として）根 $p = -2$ が得られ、したがって減衰する解が存在する。
- $k = 1$ を減衰する場合に含めてしまう。$p = 0$ は減衰する解ではなく定数解を与える。

STEP のその先へ

方程式 (†) は**遅延微分方程式**（delay differential equation）であり、$(*)$ はその特性方程式（characteristic equation）である。通常の線形常微分方程式（ODE）とは異なり、これは無限個の**複素数**の根 p をもち、一般解はそのすべてから組み立てられる。したがって完全な安定性（stability）のためには、すべての複素数の根の実部が負でなければならない。これは制御理論（control theory）で研究される。$(p+1)e^{p} = k$ の実数解はランベルトの W 関数（Lambert W function）の値であり、$p + 1 = W(ke)$ となる。そして $-e^{-1}$（ここでは $ke = -e^{-1}$）はちょうど W の分岐点（branch point）である。線形常微分方程式と特性方程式については、Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。