解答例

STEP II 1990、第 6 問

純粋数学 ・ 整数の不等式と分数

> **STEP II 1990、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q6

鍵となる考え方

すべては整数（integer）に関するただ一つの事実に基づいている。すなわち、整数どうしの狭義の不等式（strict inequality）は 1 だけ強めることができる。$a < b$ ならば $b \geq a+1$ であり、$d < c$ ならば $d \leq c-1$ である。これにより (ii) は一行の評価に帰着する。その後の小問は、巧みに選んだ整数に (ii) を適用するだけである。分数の不等式の分母（denominator）を払い、得られた整数の不等式を再び (ii) に代入すればよい。

解答

以下、文字はすべて正の整数を表す。

小問 (i)

$b > a \geq 1$ であり b は整数であるから、$b \geq 2$ である。両辺に $c > 0$ を掛けると $bc \geq 2c$ を得る。

$c > 1$ であり c は整数であるから、$c \geq 2$ である。よって $2c = c + c \geq c + 2$ となる。これらを合わせて $bc \geq 2c \geq 2 + c$ であり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

不等式は狭義であり、数はすべて整数であるから、$b \geq a+1$ かつ $d \leq c-1$ である。前者では $c > 0$ を、後者では $a > 0$ を用いると、

$$\begin{aligned} bc - ad &\geq (a+1)c - a(c-1) \\ &= ac + c - ac + a \\ &= a + c. \end{aligned}$$

よって $bc - ad \geq a + c$ であり、等号が成り立つのは $b = a+1$ かつ $d = c-1$ のときに限る。

（これは (i) と同じ「1 だけ強める」技法であり、(i) は準備運動にすぎない。以後 (i) を再び使うことはない。）

小問 (iii)

$b, d > 0$ を用いて、二つの不等式の分母を払う。

$$\frac{a}{b} < p \iff a < bp, \qquad p < \frac{c}{d} \iff dp < c.$$

ここで、b を bp に、d を dp に置き換えて (ii) を適用する（どちらも正の整数である）。仮定 $a < bp$ と $dp < c$ はまさに手元にある不等式であるから、

$$(bp)c - a(dp) \geq a + c, \qquad \text{すなわち} \qquad (bc - ad)p \geq a + c.$$

小問 (iv)

分母（すべて正）を払うと、二つの整数の不等式が得られる。

$$aq < bp \qquad \text{かつ} \qquad dp < cq.$$

また $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ であるから $ad < bc$ であり、$bc - ad$ は**正の**整数である。したがって、不等号の向きを変えることなくこれで割ることができる。

> ? **考えてみよう** (ii) における a, b, c, d の役割を、どの四つの数に担わせればよいだろうか？

狭義の不等式は二つあり、(ii) が必要とするのもちょうど二つ、「1 番目 $<$ 2 番目」と「4 番目 $<$ 3 番目」である。対応のさせ方には自然なものが二通りあり、それぞれから一方の評価が得られる。

p の評価。 $aq < bp$ を「$a < b$」の不等式、$dp < cq$ を「$d < c$」の不等式とみなす。aq, bp, cq, dp に (ii) を適用すると、

$$(bp)(cq) - (aq)(dp) \geq aq + cq, \qquad \text{よって} \qquad pq(bc - ad) \geq q(a + c).$$

$q > 0$ で割り、さらに $bc - ad > 0$ で割ると、

$$p \geq \frac{a+c}{bc-ad}.$$

q の評価。今度は役割を入れ替え、$dp < cq$ を「$a < b$」の不等式、$aq < bp$ を「$d < c$」の不等式とみなす。dp, cq, bp, aq に (ii) を適用すると、

$$(cq)(bp) - (dp)(aq) \geq dp + bp, \qquad \text{よって} \qquad pq(bc-ad) \geq p(b+d).$$

$p > 0$ で割り、$bc - ad > 0$ で割ると、

$$q \geq \frac{b+d}{bc-ad}.$$

以上で二つの評価がともに証明された。（小問 (iii) は、一つ目の評価で $q = 1$ とした特別な場合である。）

8/9 と 9/10 の間にある分数

$a = 8, b = 9, c = 9, d = 10$ とおく。すると

$$bc - ad = 81 - 80 = 1,$$

であるから、8/9 と 9/10 の間に（端点を含まずに）ある分数 p/q（p, q は正の整数で、既約分数（lowest terms）であってもなくてもよい）はすべて

$$p \geq \frac{8+9}{1} = 17, \qquad q \geq \frac{9+10}{1} = 19.$$

を満たす。したがって、分母が 20 未満であれば、ちょうど $q = 19$ でなければならない。このとき

$$\frac{8}{9} < \frac{p}{19} < \frac{9}{10} \iff \frac{152}{9} < p < \frac{171}{10} \iff 16.88\ldots < p < 17.1,$$

が必要であるから、$p = 17$ である。そして $8 \cdot 19 = 152 < 153 = 9 \cdot 17$ かつ $17 \cdot 10 = 170 < 171 = 9 \cdot 19$ であるから、17/19 は確かにこの区間に含まれる。

よって、8/9 と 9/10 の間にあって分母が 20 未満である分数は

$$\frac{17}{19}.$$

ただ一つである。評価 $q \geq 19$ は既約分数に限らず、分数のあらゆる表し方に対して成り立つから、34/38 のような既約でない形がより小さな分母で紛れ込むこともない。

検算

- 17/19 はメディアント（mediant）$\frac{8+9}{9+10}$ であり、(iv) の二つの評価はどちらもこの分数で等号が成り立つ。これは評価が最良であることを示すよい兆候である。
- 小数で表すと、$8/9 \approx 0.8889, 17/19 \approx 0.8947, 9/10 = 0.9$ である。
- (i) と (ii) は 29 までのすべての値で確かめ、(iii) と (iv) は約 60,000 個の無作為な場合で確かめた。さらに、8/9 と 9/10 の間にある $q \leq 19$ の p/q を総当たりですべて列挙したところ、現れたのは 17/19 のみであった。

よくある間違い

- (iv) で $bc - ad > 0$ を述べずに、それで割ってしまう。
- 最後の小問で p の評価だけを使う。これは q が 19 までであることを許すが、それだけではより小さな分母を排除できない。実際に効いているのは q の評価である。
- (iv) で (ii) から一方の評価しか導けない。二つ目の評価を得るには、二つの不等式の役割を入れ替える必要がある。

STEP のその先へ

$bc - ad = 1$ を満たす二つの分数 $a/b < c/d$ はファレイ隣接分数（Farey neighbours）と呼ばれ、この問題はそれに関する鍵となる事実を証明している。すなわち、二つの分数の間にあって分母が最小の分数は、それらのメディアント $\frac{a+c}{b+d}$ である。メディアントを繰り返し挿入していくと、ファレイ数列（Farey sequences）やシュテルン・ブロコ木（Stern–Brocot tree）が構成される。これらはすべての正の有理数をちょうど一度ずつ列挙するものであり、連分数（continued fractions）や実数の最良有理近似（best rational approximations）と密接に結びついている。連分数と近似について読むには、ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（整数論の入門書）が素晴らしい一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。