解答例

STEP II 1990、第 5 問

純粋数学 ・ 複素数と円

> **STEP II 1990、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q5

鍵となる考え方

円 $|z| = r$ 上では、共役（conjugation）をとることは割り算と同じである：$\bar{z} = r^2/z$。これにより、「この比が純虚数（purely imaginary）である」（2 つの方向が垂直であるかどうかの判定法）という条件が、$lm + pq = 0$ というすっきりした多項式の条件に変わる。そのあとの問題の残りは追跡作業である。垂直な弦（chord）をとるたびに、新しい点は $z \mapsto c/z$ という形の式で与えられるので、これらの写像を合成（compose）して何が出てくるかを見ればよい。

解答

垂直であるための条件

S の半径を r とすると、$|l| = |m| = |p| = |q| = r$ であるから、

$$\bar{l} = \frac{r^2}{l}, \qquad \bar{m} = \frac{r^2}{m}, \qquad \bar{p} = \frac{r^2}{p}, \qquad \bar{q} = \frac{r^2}{q}.$$

弦 LM と PQ の方向はそれぞれ $l - m$ と $p - q$ であり、点はすべて異なるので、どちらも零ではない。零でない 2 つの複素数が垂直な方向を表すのは、その商が純虚数であるときであり、かつそのときに限る。そこで

$$w = \frac{l - m}{p - q}.$$

とおく。このとき、w が純虚数であることは $w + \bar{w} = 0$ と同値である。ここで

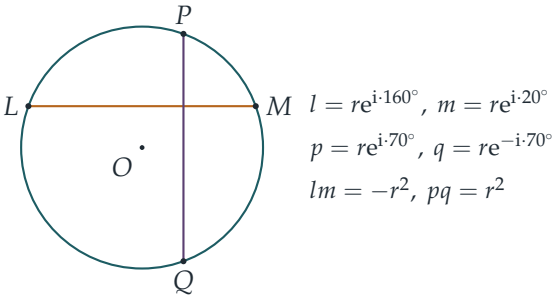
$$\bar{w} = \frac{r^2/l - r^2/m}{r^2/p - r^2/q} = \frac{(m - l)/(lm)}{(q - p)/(pq)} = \frac{l - m}{p - q} \cdot \frac{pq}{lm} = w\,\frac{pq}{lm},$$

であるから、

$$w + \bar{w} = w\left(1 + \frac{pq}{lm}\right) = \frac{w}{lm}(lm + pq).$$

$w \neq 0$ かつ $lm \neq 0$ であるから、これが零になるのは $lm + pq = 0$ のとき、かつそのときに限る。よって、$LM \perp PQ$ であることと $lm + pq = 0$ であることは同値であり、示すべきことが示された。

（垂直二等分線（perpendicular bisector）を用いる方法も、同じ考え方を幾何の装いで述べたものである。弦 LM の垂直二等分線は O を通り、弦の方向はその垂直二等分線の方向の i 倍になる。）



3点の場合

A_1, A_2, A_3 を a_1, a_2, a_3 で表し、A_1' を z で表す。上の条件により、「$A_1'A_2' \perp A_1A_2$」は $z\,a_2' = -a_1a_2$ を意味するので、

$$a_2' = -\frac{a_1a_2}{z}.$$

$|a_2'| = r \cdot r/r = r$ であるから、この点は確かに S 上にある。また、条件を満たす S 上の点はこれ以外にない。同様にして

$$a_3' = -\frac{a_2a_3}{a_2'} = \frac{a_3}{a_1}z,$$

$$a_1'' = -\frac{a_3a_1}{a_3'} = -\frac{a_1^2}{z}.$$

したがって、$A_1'' = A_1'$ となるのは $z = -a_1^2/z$ のとき、かつそのときに限る。すなわち

$$z^2 = -a_1^2 \iff z = \pm i\,a_1.$$

どちらの値も絶対値が r なので S 上にあり、$a_1 \neq 0$ であるから互いに異なる。よって A_1' の位置はちょうど **2** つあり、それは A_1 を O のまわりに $\pm 90^\circ$ 回転した点である。

考えてみよう 写像 $z \mapsto -a_1^2/z$ は円に対して何をしているのだろうか。

S 上では $1/z = \bar{z}/r^2$ であるから、$-a_1^2/z = -(a_1^2/r^2)\,\bar{z}$ となる。これは共役をとったあとに回転（rotation）を施したもの、すなわち円の直径に関する鏡映（reflection）である。鏡映は、その鏡となる直径の両端のちょうど 2 点を動かさない。解が 2 つある理由はここにある。実際、各ステップ $z \mapsto -a_k a_{k+1}/z$ はどれもこのような鏡映であり、このことが以下のすべてを説明する。

4 点の場合

最後のステップの代わりに a_4 を用いて同じ追跡を続けると、

$$a_2' = -\frac{a_1 a_2}{z}, \qquad a_3' = \frac{a_3}{a_1}\,z,$$
$$a_4' = -\frac{a_3 a_4}{a_3'} = -\frac{a_1 a_4}{z}, \qquad a_1'' = -\frac{a_4 a_1}{a_4'} = z.$$

よって、S 上の A_1' をどのように選んでも $A_1'' = A_1'$ となる。

n 点の場合

k に関する帰納法（induction）により、追跡の結果は

$$a_k' = \frac{a_k}{a_1}\,z \quad (k \text{ が奇数}), \qquad a_k' = -\frac{a_1 a_k}{z} \quad (k \text{ が偶数}),$$

となる。実際、a_k' が一方の形をしていれば、$a_{k+1}' = -a_k a_{k+1}/a_k'$ はもう一方の形になる。最後のステップは $a_1'' = -a_n a_1/a_n'$ である：

- n が偶数ならば、$a_1'' = -a_n a_1 \cdot \dfrac{z}{-a_1 a_n} = z$ となるので、どの A_1' に対しても A_1'' は A_1' と一致する。
- n が奇数ならば、$a_1'' = -a_n a_1 \cdot \dfrac{a_1}{a_n z} = -\dfrac{a_1^2}{z}$ となるので、$n = 3$ の場合とまったく同様に、A_1'' が A_1' と一致するような A_1' の位置はちょうど 2 つ、すなわち $z = \pm \mathrm{i} a_1$ である。

言葉で言えば、偶数回の鏡映は回転になり、ここではそれが恒等写像（identity）であることがわかる。一方、奇数回の鏡映は鏡映になり、円上に 2 つの不動点（fixed point）をもつ。

検算

- 図について：$l = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 160^\circ}$、$m = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot 20^\circ}$ とすると弦 LM は水平であり、$p = r\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\cdot 70^\circ}$ とすると弦 PQ は鉛直である。実際、$lm = r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -r^2 = -pq$ となっている。
- 数値的に、ランダムな半径の円上のランダムな点について、n を 3 から 9 まで変え

て垂直な弦を追跡したところ、どのステップでも得られる点は S 上にあり、n が偶数のときはちょうど出発点に戻った。n が奇数のときは、円周上の 200 000 個の出発位置を調べたところ、不動点はちょうど 2 つ、$\pm \mathrm{i}a_1$ にあった。

よくある間違い

- 垂直かどうかを「w が実数である」で判定してしまう。平行な弦では比が実数になり、垂直な弦では比が純虚数になる。
- $\bar{z} = r^2/z$ には $|z| = r$ が必要であることを忘れる。4 点すべてが O を中心とする同じ円上にあるという事実こそが、この条件をこれほど簡潔にしているのである。
- n 点の場合に、答えが n の偶奇（parity）によって変わることを忘れる。

STEP のその先へ

写像 $z \mapsto c/z$ を円に制限したものは鏡映であり、鏡映を合成することは等長変換群（isometry group）の研究の出発点である。円の対称性全体は直交群（orthogonal group）$O(2)$ をなし、そこでは 2 つの鏡映を合成すると回転になる。$z \mapsto c/z$ や $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$ のような写像はメビウス変換（Möbius transformation）であり、複素解析（complex analysis）や幾何学において中心的な役割を果たす。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、この両方の見方を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。