解答例

STEP II 1990、第 4 問

純粋数学 • 直線の配置と数学的帰納法

> **STEP II 1990、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q4

この問題は、*Beyond STEP* の第 9.1 節「**平面を分割する直線**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch09/lazy-caterer.html

鍵となる考え方

図を直線 1 本ずつ見ていく。新しい直線を加えると、それは古い直線のそれぞれとちょうど 1 回ずつ、しかも相異なる点で交わるので、予測できる個数の部分に切り分けられる。その各部分は二つの役割を果たす。一つは新しい線分になること、もう一つは既存の領域を二つに切り分けることである。新しい直線 1 本の効果を数えると漸化式（recurrence）が得られ、その漸化式は容易に和をとって解くことができる。

解答

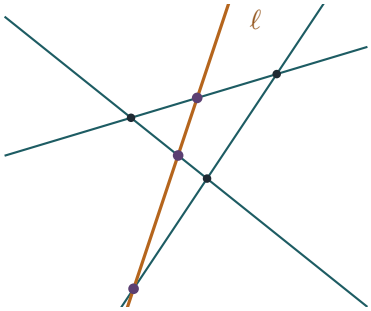
小さな場合

以下を通じて、「線分」（segment）とは、各直線上の隣り合う交点の間にある部分を指す。各直線の両端にある 2 本の無限に延びた部分、すなわち半直線（ray）も含める。また、直線が 1 本だけのときは、その直線全体を 1 本の線分と数える。最初のいくつかの場合を図に描くと次のようになる。

n	1	2	3	4
線分	1	4	9	16
領域	2	4	7	11

たとえば、3 本の直線は三角形をつくる。各直線は有限の辺 1 本と半直線 2 本に切り分

けられるので、線分は 9 本である。領域は、三角形そのもの、その辺に接する 3 個の領域、その頂点に接する 3 個の領域であり、合わせて 7 個である。線分の数からは n^2 が予想される。



図は 3 本の直線（青緑）と 4 本目の直線 ℓ（琥珀色）を示している。ℓ が古い直線と交わる 3 個の紫の点によって、ℓ は 4 個の部分に切り分けられ、各部分が古い 7 個の領域のうち一つずつを分割するので、領域は 11 個になる。

線分の数

n 本の直線のうち 1 本を固定する。どの 2 本も平行でないので、この直線は他の $n-1$ 本の直線のそれぞれと交わる。さらに、どの 3 本も 1 点で交わらない（共点でない、concurrent でない）ので、これら $n-1$ 個の交点はすべて相異なる（もし二つが一致すれば、そこで 3 本の直線が交わることになる）。したがって、この直線上には相異なる $n-1$ 個の点があり、それらが直線を n 個の部分、すなわち $n-2$ 本の有限の線分と 2 本の半直線に切り分ける。これを n 本の直線それぞれについて行うと、

$$\text{線分の数} = n \cdot n = n^2.$$

各線分はちょうど 1 本の直線上にあるので、どの線分も 1 回ずつ数えられている。

数学的帰納法（induction）を用いたければ、線分の数を $S(n)$ とおく。一般の位置（general position）にある $n-1$ 本の直線に n 本目の直線を加えると、新しい直線は n 個の部分に切り分けられ、さらにそれが交わる古い $n-1$ 本の直線のそれぞれでは、線分の一つが二つに分割され、線分が 1 本ずつ増える。よって

$$S(n) = S(n-1) + n + (n-1) = S(n-1) + 2n - 1,$$

であり、$S(1) = 1$ と合わせて、$S(n-1) = (n-1)^2$ ならば $S(n) = (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2$ となる。

領域の数

一般の位置にある n 本の直線がつくる領域の数を $R(n)$ とおく。すると $R(1)=2$ である。このような $n-1$ 本の直線から出発し、n 本目の直線 ℓ を加える。上と同様に、ℓ は古い直線と相異なる $n-1$ 個の点で交わり、n 個の部分に切り分けられる。

これらの部分の一つをとる。その内部はどの古い直線とも交わらないので、ただ一つの古い領域の内部にあり、しかもその領域を境界から境界まで（あるいは無限遠まで）横切っている。したがって、それはその領域を二つに分割する。

> **考えてみよう** n 個の部分のうち二つが同じ古い領域に含まれ、その結果、新しく生じる領域が n 個より少なくなることはありうるだろうか？

ありえない。各領域は半平面（各古い直線に関して決まった側）の共通部分であるから、凸（convex）である。直線と凸集合の共通部分は一つの区間であるので、ℓ は各古い領域を高々 1 回しか通らず、異なる部分は異なる領域に含まれる。また、ℓ が通らない領域は影響を受けない。

よって、ℓ を加えると、ちょうど n 個の古い領域がそれぞれ二つに分割され、残りはそのまま変わらない。すなわち

$$R(n)=R(n-1)+n.$$

ここで数学的帰納法を用いる。式 $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ は $n=1$ のとき 2 を与え、これは正しい。$R(n-1)=\frac{1}{2}\big((n-1)^2+(n-1)+2\big)=\frac{1}{2}(n^2-n+2)$ ならば、

$$R(n)=\tfrac{1}{2}(n^2-n+2)+n=\tfrac{1}{2}(n^2+n+2),$$

となるので、求めるとおり、この式はすべての $n\geq 1$ で成り立つ。（同値な言い方をすれば、$R(n)=1+(1+2+\cdots+n)=1+\frac{1}{2}n(n+1)$ であり、先頭の 1 は直線が 1 本もないときの平面全体を表す。）

検算

- この式は $n=1,2,3,4$ に対して $2,4,7,11$ を与え、図と一致する。
- オイラー（Euler）の公式によって、独立な検算ができる。無限に延びた半直線をすべてただ一つの「無限遠点」でつなぐ。すると、頂点は $V=\binom{n}{2}+1$ 個、辺は $E=n^2$ 本、面は F 個で $V-E+F=2$ が成り立つので、$F=n^2-\binom{n}{2}+1=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ となる。
- 整数係数をもつ高々 8 本の直線からなる集合をコンピュータでランダムに描き、交点の位置を求めて線分を数え、さらに各交点の周りと遠方にとった標本点について

「各直線のどちら側にあるか」のパターンが何通り現れるかによって領域を数えた。たとえば、8 本の直線では、毎回 64 本の線分と 37 個の領域が得られた。

よくある間違い

- 各直線上の 2 本の無限に延びた半直線を数え忘れ、n^2 ではなく $n(n-2)$ としてしまう。
- 新しい直線によって増える領域を、n 個（部分 1 個につき 1 個）ではなく $n-1$ 個（交点 1 個につき 1 個）としてしまう。
- 仮定を使わない。「どの 3 本も 1 点で交わらない」という条件がなければ、直線上の交点が相異なるとは限らず、個数は減ってしまう。

STEP のその先へ

これは**超平面配置**（hyperplane arrangement）の最も簡単な場合である。同じ議論を 1 次元上げて行うと、一般の位置にある n 枚の平面は空間を $\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$ 個の部分に切り分けることがわかる。新しい平面それ自体が、古い平面によって $R(n-1)$ 個の領域に切り分けられるからである。オイラーの公式による検算は、位相幾何学（topology）の中心的な概念であるオイラー標数（Euler characteristic）を初めて垣間見るものである。オイラーの公式とその応用についてのすばらしい章として、Aigner と Ziegler の *Proofs from THE BOOK*（邦題『天書の証明』）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。