解答例

STEP II 1990、第 3 問

純粋数学 • 3 次関数のグラフの概形

STEP II 1990、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s2-q3

鍵となる考え方

3 次関数（cubic）を $f(x) = x(x^2 - 2bx + c^2)$ と書く。2 つの判別式（discriminant）がすべてを支配する。$f'(x)$ の判別式からは極値点（turning point）があるかどうかがわかり、2 次の因数の判別式からは曲線が原点以外で x 軸と交わるかどうかがわかる。7 つの場合は、2 つの境界値 $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ と c に対して b をどこに置くかの違いにすぎない。3 次関数のグラフを描いてしまえば、$y^2 = f(x)$ はほとんど労せずに得られる。$f(x) \geq 0$ となる部分だけを残し、平方根をとり、x 軸に関して折り返せばよい。

解答

すべての場合に成り立つ事実

$f(x) = x^3 - 2bx^2 + c^2x = x(x^2 - 2bx + c^2)$ とおく。このとき

$$f'(x) = 3x^2 - 4bx + c^2, \qquad f''(x) = 6x - 4b.$$

- **極値点。** f' の判別式は $16b^2 - 12c^2 = 4(4b^2 - 3c^2)$ である。したがって f' は、$2b > c\sqrt{3}$ ならば相異なる 2 つの実数の零点をもち、$2b = c\sqrt{3}$ ならば 1 つの重根（repeated root）をもち、$2b < c\sqrt{3}$ ならば零点をもたない。零点があるとき、それらの和は $\frac{4}{3}b \geq 0$、積は $\frac{1}{3}c^2 \geq 0$ であるから、どちらも負ではない。すなわち、極値点はすべて $x \geq 0$ にある。
- **根（*root*）。** 常に $f(0) = 0$ である。2 次の因数は $(x - b)^2 + c^2 - b^2$ であるから、$b < c$ ならば実数の零点をもたず、$b = c$ ならば二重の零点 $x = b$ をもち、$b > c$ ならば 2 つの零点 $b \pm \sqrt{b^2 - c^2}$ をもつ。

- **負の x。** $x<0$ のとき、x^3、$-2bx^2$、c^2x はいずれも ≤ 0 であり、しかも $x^3<0$ であるから、$f(x)<0$ である。y 軸より左側の曲線は、すべて x 軸より下にある。
- **形状。** $x\to\pm\infty$ のとき $f(x)\to\pm\infty$ である。原点での傾きは $f'(0)=c^2$ であり、変曲点（point of inflection）は f'' の符号が変わる $x=\frac{2}{3}b$ のただ1つである。

$c>0$ のとき常に $c\sqrt{3}<2c$ であるから、c を固定すると、各場合は b が増加する順に並ぶ。すなわち、極値点なし、次に停留変曲点、次に軸より上にある極値点、次に軸に接する根、最後に3つの根、という順である。

3次関数のグラフ

(i) $2b<c\sqrt{3}$。このとき、すべての x に対して $f'(x)>0$ である（判別式が負で、最高次の係数が正であるから）。よって f は狭義単調増加（strictly increasing）である。また $b<\frac{\sqrt{3}}{2}c<c$ である（ここでは $c>0$ であることに注意）から、根は原点のみである。曲線は傾き c^2 で原点を通って上昇し、$x=\frac{2}{3}b$ に変曲点をもつ。

(ii) $2b=c\sqrt{3}\neq 0$。このとき $f'(x)=3(x-\frac{2}{3}b)^2\ge 0$ であるから、f は依然として増加するが、$x=\frac{2}{3}b=c/\sqrt{3}$ において一瞬だけ水平になる。ここは $f''=0$ となる点でもあるから、停留変曲点（stationary point of inflection）である。$c^2=\frac{4}{3}b^2$ を用いると

$$f\left(\tfrac{2}{3}b\right)=\tfrac{2}{3}b\left(\tfrac{4}{9}b^2-\tfrac{4}{3}b^2+\tfrac{4}{3}b^2\right)=\tfrac{8}{27}b^3=\tfrac{\sqrt{3}}{9}c^3>0.$$

やはり $b<c$ であるから、根は原点のみである。

(iii) $c\sqrt{3}<2b<2c$。このとき f' は2つの零点 $x_1<x_2$ をもち、どちらも正である。$x_1=\frac{1}{3}\left(2b-\sqrt{4b^2-3c^2}\right)$ で極大（maximum）、$x_2=\frac{1}{3}\left(2b+\sqrt{4b^2-3c^2}\right)$ で極小（minimum）となる。

? **考えてみよう** 極小点は x 軸より下に沈み込むだろうか？

沈み込まない。$b<c$ であるから、因数 $(x-b)^2+c^2-b^2$ はすべての x に対して正であり、したがってすべての $x>0$ に対して $f(x)>0$ である。よって2つの極値点はどちらも軸より上にあり、曲線が軸を横切るのは依然として原点のみである。曲線は上昇し、少しだけ下がり、その後はずっと上昇し続ける。

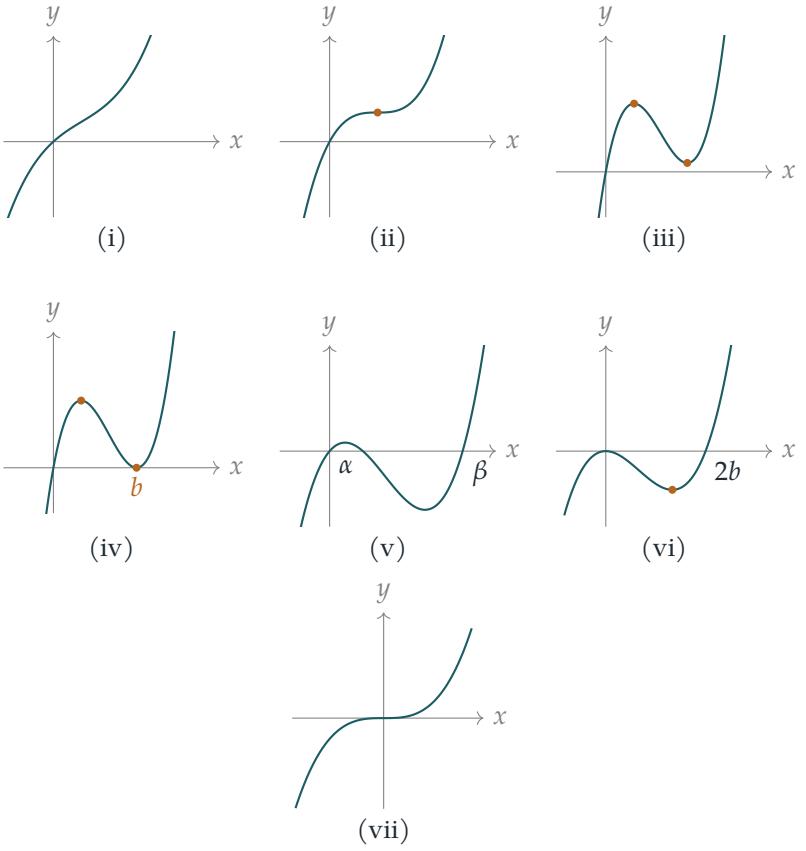
(iv) $b=c\neq 0$。このとき $f(x)=x(x-b)^2$ である。$x=b$ が重根であることは、曲線がそこで軸に接することを意味する。これが極小点 $(b,0)$ である。$f'(x)=(x-b)(3x-b)$ のもう1つの零点から、極大点 $\left(\frac{1}{3}b,\frac{4}{27}b^3\right)$ が得られる。

(v) $b>c>0$。3つの根 $0<\alpha<\beta$ がある。ここで $\alpha=b-\sqrt{b^2-c^2}$、$\beta=b+\sqrt{b^2-c^2}$ である（$\sqrt{b^2-c^2}<b$ であるから、どちらも正）。隣り合う根の間で曲線は向きを変えなければならないから、極大点は $(0,\alpha)$ にあってそこでは $f>0$ であり、極小点は (α,β) にあってそこでは $f<0$ である。したがって、$f\ge 0$ となるのはちょうど $[0,\alpha]$

上と $[\beta, \infty)$ 上である。

(vi) $c = 0$、$b \neq 0$。このとき $f(x) = x^2(x-2b)$、$f'(x) = x(3x-4b)$ である。原点が重根であるから、原点は曲線が軸に接する極大点となり、$\left(\frac{4}{3}b, -\frac{32}{27}b^3\right)$ に極小点がある。曲線は $x = 2b$ で軸を横切る。

(vii) $b = c = 0$。これは $y = x^3$ であり、原点に停留変曲点をもつ。



これらの図では、(i)〜(iv) で $c = 1$ かつ $b = \frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0.99, 1、(v) で $(b, c) = (1, 0.8)$、(vi) で $b = 0.6$ としている。(iii) と (iv) の小さな山が見えるように、縦軸の尺度は図ごとに異なる。

曲線 $y^2 = f(x)$

次の 3 つの規則によって、各 3 次関数のグラフは曲線 $y^2 = f(x)$ に変わる。

- $f(x) < 0$ となる点は存在せず、特に $x < 0$ となる点は存在しない。
- $f(x) \geq 0$ のところでは $y = \pm\sqrt{f(x)}$ であるから、曲線は x 軸に関して対称であり、

f が最大となるところで最も高くなる。

▶ 微分すると $2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$ である。

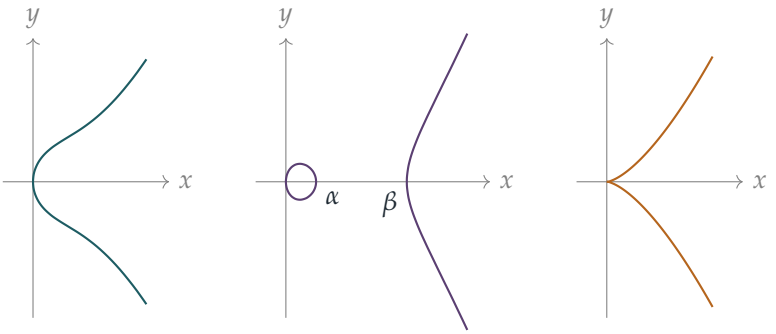
考えてみよう 曲線は x 軸と交わるところでどのような形をしているだろうか？

f の単純根（simple root）x_0 では $f'(x_0) \neq 0$ であり、$y \to 0$ のとき $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \dfrac{2y}{f'(x)} \to 0$ となる。したがって、そこでの接線は**鉛直**であり、上半分と下半分はなめらかにつながる。このような根の近くでは $y^2 \approx f'(x_0)(x - x_0)$ であり、これは横倒しになった放物線である。場合 (vii) が示すように、重根では様子が異なる。

場合 (i)。$f(x) \geq 0$ となるのはちょうど $x \geq 0$ のときであり、0 における根は単純根である（$f'(0) = c^2 > 0$）。したがって、曲線は有界でない 1 本の枝（branch）からなる。曲線は鉛直な接線をもって原点から出発し、原点付近では $y^2 \approx c^2 x$ のように見える。f は増加するから $|y| = \sqrt{f(x)}$ は着実に増加し、最終的には $x^{3/2}$ のように増大する。上半分は、はじめは $\sqrt{x}$ のように上に凸（concave）であり、最後は $x^{3/2}$ のように下に凸（convex）になるから、変曲点をもつ（対称性により、下半分も同様である）。

場合 (v)。$[0, \alpha]$ 上と $[\beta, \infty)$ 上で $f(x) \geq 0$ であり、3 つの根はすべて単純根である。したがって、曲線は 2 つの分離した部分からなる。1 つは $(0,0)$ と $(\alpha, 0)$ を通る閉じた卵形（oval）であり、どちらの点でも鉛直な接線をもち、3 次関数の極大点の x 座標で（y 方向に）最も幅が広くなる。もう 1 つは、$(\beta, 0)$ から鉛直な接線をもって出発し、場合 (i) の曲線のように右へ開いていく有界でない枝である。3 次関数が負となる隙間 $\alpha < x < \beta$ には何もない。

場合 (vii)。$y^2 = x^3$ であるから、$x \geq 0$ かつ $y = \pm x^{3/2}$ である。このとき、$x \to 0$ のとき $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \pm\frac{3}{2}x^{1/2} \to 0$ となる。すなわち、上半分と下半分はどちらも上と下から x **軸に接しながら**原点に到達し、尖点（cusp）と呼ばれる鋭くとがった点をつくる。



(i) (v) (vii)

これらの図では、対応する 3 次関数と同じ b と c の値を用い、2 つの軸の尺度を等しくしている。

検算

- 一般的な主張に $b = c = 0$ を代入すると、(vii) と一致するはずである。たとえば、(ii) の停留値 $\frac{8}{27}b^3$ と (vi) の極小値 $-\frac{32}{27}b^3$ は、どちらも原点に縮退する。
- $c = 1$、$b = 0.99$（場合 (iii)）のとき、極値点はおよそ $(0.340, 0.150)$ と $(0.980, 0.020)$ にあり、主張どおりどちらも軸より上にある。$(b, c) = (1, 0.8)$ のとき、根は 0、0.4、1.6 であり、極小値はおよそ -0.388 で、$x \approx 1.147$ においてとる。これは $(0.4, 1.6)$ の内部にある。
- 場合 (i)、(iii)、(v) について数千組のランダムな (b, c) で数値的に検証し、極値点と根の個数と位置、および $f \geq 0$ となる集合を確認した。

よくある間違い

- 場合 (iii) の極小点を軸より下に描くこと。$b < c$ のとき、3 次関数はすべての $x > 0$ で正である。
- $y^2 = f(x)$ が単純根で x 軸を横切るところに、角や水平な接線を描くこと。そこでの接線は鉛直である。
- $y^2 = f(x)$ には 3 次関数が負となる点が存在しないことを忘れること。そのため、場合 (v) では卵形と枝はつながっていない。

STEP のその先へ

3 次式が相異なる根をもつような曲線 $y^2 = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ は**楕円曲線**（elliptic curve）であり、現代の数論（number theory）の中心的な対象の 1 つである。3 つの実数の根をもつ場合 (v) では、卵形と枝からなる 2 つの部分の図が得られ、実数の根を 1 つだけもつ場合 (i) では、1 つの部分からなる図が得られる。根が一致すると、曲線は特異（singular）になる。場合 (vii) は尖点をもち、場合 (iv) では $(b, 0)$ で自分自身と交差する曲線が得られる。このような曲線上の点を「足し合わせる」ことができる驚くべき仕組みへの入門としては、シルヴァーマン（Silverman）とテイト（Tate）による *Rational Points on Elliptic Curves*（楕円曲線上の有理点）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。