解答例

STEP II 1990、第 2 問

純粋数学 ・ トレミーの定理

> **STEP II 1990、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q2

鍵となる考え方

前半は三角関数の恒等式（identity）であり、正弦の積をすべて余弦の差に直してしまえば崩れるように解ける。そのうえで条件 $A+B+C+D=\pi$ を用いて $\cos(A+C)$ と $\cos(A-C)$ を書き換えればよい。後半はトレミー（Ptolemy）の定理、すなわちトレミーの定理（Ptolemy's theorem）である。中心 O がヒントになっている。半径 r の円の弦（chord）の長さはつねに $2r\sin$(弦が中心に張る角の半分、中心はO) であり、O のまわりの四つの半角の和は π になる。これはまさに前半の条件である。

解答

恒等式

積和公式（product-to-sum formula）

$$\sin X \sin Y = \tfrac{1}{2}[\cos(X-Y) - \cos(X+Y)]$$

を 3 回用いる。左辺については

$$\sin(A+B)\sin(A+D) = \tfrac{1}{2}[\cos(B-D) - \cos(2A+B+D)],$$
$$\sin B \sin D = \tfrac{1}{2}[\cos(B-D) - \cos(B+D)],$$

であるから、$\cos(B-D)$ の項が打ち消し合い、

$$\sin(A+B)\sin(A+D) - \sin B \sin D = \tfrac{1}{2}[\cos(B+D) - \cos(2A+B+D)].$$

となる。右辺については

$$\sin A \sin C = \tfrac{1}{2}[\cos(A-C) - \cos(A+C)].$$

である。ここで $C = \pi - A - B - D$ を用いると、

$$A + C = \pi - (B + D), \qquad \text{よって} \quad \cos(A + C) = -\cos(B + D),$$
$$A - C = (2A + B + D) - \pi, \qquad \text{よって} \quad \cos(A - C) = -\cos(2A + B + D),$$

を得る。ただし $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ および $\cos(\theta - \pi) = -\cos\theta$ を用いた。したがって

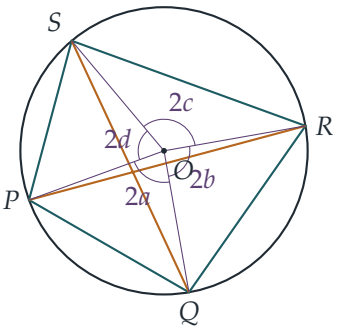
$$\sin A \sin C = \tfrac{1}{2}[-\cos(2A + B + D) + \cos(B + D)],$$

となり、これは左辺と一致する。以上で恒等式が証明された。

円

円の半径を r とする。円周上を P から Q、R、S と進んで P に戻るとき、弧 PQ、QR、RS、SP が O に張る角をそれぞれ $2a$、$2b$、$2c$、$2d$ とする。点はこの順に並んでいるので、これら四つの弧は重なることなく円周全体を構成する。よって

$$a, b, c, d > 0, \qquad 2a + 2b + 2c + 2d = 2\pi, \qquad \text{すなわち} \quad a + b + c + d = \pi.$$



考えてみよう 弧が中心に張る角が 2θ であるような弦の長さはいくらか。

$0 < 2\theta \le \pi$ のとき、O と弦の両端がつくる三角形は、2辺が r で頂角が 2θ の二等辺三角形（isosceles triangle）である。O から下ろした垂線は弦と頂角をともに二等分するので、弦の長さは $2r\sin\theta$ となる。一方 $\pi < 2\theta < 2\pi$ のときは、三角形の O における内角は $2\pi - 2\theta$ であり、弦の長さは $2r\sin(\pi - \theta) = 2r\sin\theta$ となる。よっていずれの場合も

$$\text{弦の長さ} = 2r\sin\theta.$$

これを四つの辺と対角線（弧 $P \to Q \to R$ が張る角は $2(a + b)$、弧 $Q \to R \to S$ が張る角は $2(b + c)$）に適用すると、

$$PQ = 2r\sin a, \quad QR = 2r\sin b, \quad RS = 2r\sin c, \quad PS = 2r\sin d,$$

$$PR = 2r\sin(a+b), \qquad QS = 2r\sin(b+c).$$

を得る。$a+b$ や $b+c$ は $\frac{\pi}{2}$ を超えることがある点に注意せよ。半円より大きい弧に対する公式が必要だったのはこのためである。

$4r^2$ で割ると、示すべき結果は

$$\sin a \sin c + \sin b \sin d = \sin(a+b)\sin(b+c),$$

すなわち、同値な形で

$$\sin(b+a)\sin(b+c) - \sin a \sin c = \sin b \sin d.$$

となる。これはまさに前半の恒等式で $A = b$、$B = a$、$D = c$、$C = d$ としたものであり、$b+a+d+c = \pi$ であるからこの代入は許される。改めて $4r^2$ を掛ければ

$$PQ \times RS + QR \times PS = PR \times QS,$$

となり、示すべきことが得られた。

検算

- 半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円に内接する正方形は、辺が 1、対角線が $\sqrt{2}$ である：$1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$。
- 辺が p と q の任意の長方形では、トレミーの定理は $p^2+q^2 = (\text{対角線})^2$ となる。つまりピタゴラスの定理（Pythagoras's theorem）は特別な場合である。3×4 の長方形では $9+16 = 25 = 5\times 5$ である。
- A, B, D の無作為な値 10^5 組（$C = \pi - A - B - D$ とする）で恒等式を数値的に確かめたところ、最大誤差は約 5×10^{-15} であった。また、無作為に選んだ円に内接する四角形（cyclic quadrilateral）10^5 個は、相対誤差 10^{-15} 以内で最終結果を満たした。点の順序を崩すと（たとえば円周上に P, R, Q, S の順に並べると）等式は成り立たなくなるので、順序は本当に重要である。

よくある間違い

- 円周上の点における円周角（inscribed angle）を、どの弧に対する角なのかを述べずに用いること。問題が示唆するように中心角を使えば、この問題は避けられる。
- 対角線が半円より大きい弧を切り取ることがあるのを忘れること。公式 $2r\sin\theta$ はそれでも成り立つが、上で述べた一行の正当化が必要である。
- A, B, C, D に対応させる角を取り違えること。A と C は右辺にのみ現れる二つの角でなければならず、ここでは b と d である。

STEP のその先へ

トレミーの定理には深い続きがある。平面上の**任意の** 4 点について $PQ \cdot RS + QR \cdot PS \geq PR \cdot QS$ が成り立ち、等号が成り立つのはちょうど 4 点がこの順に円（または直線）上に並ぶときである。鮮やかな証明として、点を複素数（complex numbers）p, q, r, s とみなし、代数的恒等式 $(p-q)(r-s) + (q-r)(p-s) = (p-r)(q-s)$ に注目して三角不等式（triangle inequality）を適用する方法がある。等号成立の場合を調べるところで複素平面の幾何が登場する。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ビジュアル複素解析』）は、この種の議論や、この結果をやはり見事に証明する反転（inversion）に触れるのにうってつけの本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。