解答例

STEP II 1990、第 16 問

確率・統計 ・ ベイズの定理

> **STEP II 1990、問 16**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q16

鍵となる考え方

これは姿を変えたベイズの定理（Bayes' theorem）である。写真からは黒のネクタイを着けていたことがわかり、求めたいのはそれを**条件としたときの**曜日の確率である。そこでまず順方向に考える。各種類の日について、ズボンで枝分かれする樹形図（tree diagram）を用いて黒のネクタイを着ける確率を求める。次に、その条件付き確率（conditional probability）を逆向きにする。月曜日の規則は樹形図の枝を一本変えるだけなので、後半の小問ではほとんど追加の手間がかからない。

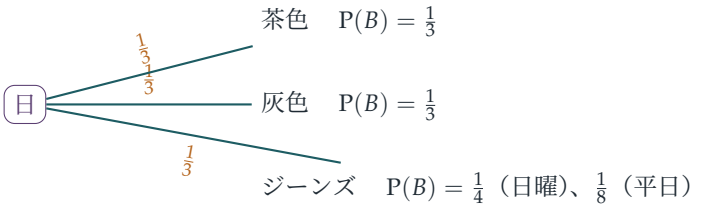
解答

写真が日曜日に撮られたという事象を S、私が黒のネクタイを着けているという事象を B とする。写真は 7 日のうちどの日のものである可能性も等しいので、写真を見る前の段階では $\mathrm{P}(S) = \frac{1}{7}$ である。（後で扱う月曜日を除く）すべての日において、それぞれのズボンを選ぶ確率は $\frac{1}{3}$ である。

各種類の日に黒のネクタイを着ける確率

- **茶色のズボン**。クラヴァットは除外されるので、ネクタイは黒、水玉、レジメンタルのいずれかから無作為に選ばれる：$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$。
- **灰色のズボン**。水玉のネクタイは除外されるので、黒、レジメンタル、クラヴァットから選ぶ：$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{3}$。
- **日曜日のジーンズ**。必ずネクタイを着け、4 本すべてから選ぶ：$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{4}$。
- **平日のジーンズ**。確率 $\frac{1}{2}$ でスウェットシャツを着てネクタイはしない。そうでなけ

れば 4 本のネクタイのいずれかである：$\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$。



枝に沿って足し合わせる（ズボンについての全確率の公式（law of total probability））と、

$$\mathrm{P}(B \mid \text{日曜日}) = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{11}{12} = \tfrac{11}{36} = \tfrac{22}{72},$$
$$\mathrm{P}(B \mid \text{平日}) = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{8}\right) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{19}{24} = \tfrac{19}{72}.$$

前半の答え

ベイズの定理により、日曜日の事前確率（prior probability）を $\frac{1}{7}$、6 日間の平日をまとめた事前確率を $\frac{6}{7}$ として、

$$\mathrm{P}(S \mid B) = \frac{\frac{1}{7} \cdot \frac{22}{72}}{\frac{1}{7} \cdot \frac{22}{72} + \frac{6}{7} \cdot \frac{19}{72}} = \frac{22}{22 + 6 \times 19} = \frac{22}{136} = \frac{11}{68},$$

となり、示すべき結果が得られた。（共通因数 $\frac{1}{7 \times 72}$ が約分で消える。すべてを分母 72 でそろえておく価値があるのはこのためである。）

考えてみよう 答えが単に $\mathrm{P}(B \mid \text{日曜日})$ や $\frac{1}{7}$ にならないのはなぜか。

$\mathrm{P}(B \mid \text{日曜日}) = \frac{11}{36}$ は別の問いに答えている。これは曜日を条件としたネクタイの確率であり、ネクタイを条件とした曜日の確率ではない。また $\frac{1}{7}$ は証拠を無視している。日曜日にはネクタイなしの選択肢がないため、黒のネクタイは日曜日のほうがわずかに起こりやすい（$\frac{22}{72}$ 対 $\frac{19}{72}$）。そのため写真によって、日曜日である確率は $\frac{1}{7} = \frac{11}{77}$ から $\frac{11}{68}$ へと少し押し上げられる。

月曜日の規則がある場合

今度は月曜日には必ずジーンズをはき、しかも月曜日は平日であるから、スウェットシャツの選択肢は依然として適用される：

$$\mathrm{P}(B \mid \text{月曜日}) = 1 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{8} = \tfrac{9}{72}.$$

日曜日と残り 5 日の平日は変わらない。各曜日の事前確率は依然として $\frac{1}{7}$ であり、これは約分で消えるので、

$$\mathrm{P}(S \mid B) = \frac{\frac{22}{72}}{\frac{22}{72} + \frac{9}{72} + 5 \cdot \frac{19}{72}} = \frac{22}{22 + 9 + 95} = \frac{22}{126} = \frac{11}{63}.$$

これは $\frac{11}{68}$ より少し大きい。これは理にかなっている。月曜日には黒のネクタイが起こりにくくなる（$\frac{19}{72}$ ではなく $\frac{1}{8}$）ので、黒のネクタイの写真は月曜日から遠ざかり、わずかに日曜日の側を指すことになる。

検算

- 各曜日のネクタイの確率と「ネクタイなし」の確率を合わせると 1 になる。たとえば平日にネクタイなしとなる確率は $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ である。
- 無作為な 4×10^5 日のシミュレーションでは、黒のネクタイの日のうち日曜日である割合はおよそ 0.161（厳密値 $\frac{11}{68} \approx 0.1618$）、月曜日の規則がある場合はおよそ 0.174（厳密値 $\frac{11}{63} \approx 0.1746$）となる。

よくある間違い

- 月曜日もジーンズには確率半分のスウェットシャツが伴うことを忘れる。月曜日は平日である。月曜日について $\frac{1}{8}$ の代わりに $\frac{1}{4}$ を用いると $\frac{22}{135}$ になってしまう。
- 茶色や灰色のズボンのときに 4 本すべてのネクタイから選んでしまう。どちらの場合もネクタイは 3 本しか残らない。

STEP のその先へ

「仮説を条件とした証拠の確率」を「証拠を条件とした仮説の確率」に変換することは、ベイズ推論（Bayesian inference）の核心である。これを簡潔に言い表すと、事後オッズ（posterior odds）は事前オッズ（prior odds）と尤度比（likelihood ratio）の積に等しい、となる。ここでは日曜日対平日の事前オッズは 1 : 6、尤度比は 22 : 19 であり、これより 22 : 114、すなわち 11 : 57 が得られる。大学の講義ではこれをベイズ統計学（Bayesian statistics）へと発展させ、そこでは分布全体が同じようにして更新される。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）には、条件付き確率についての優れた章があり、本問のような例が数多く載っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。