解答例

# STEP II 1990、第 15 問

確率・統計 ・ 順序統計量

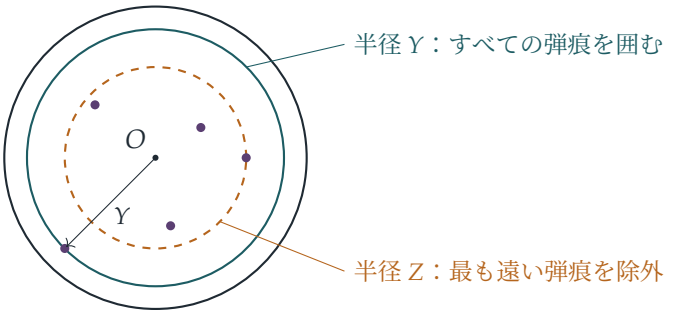
**STEP II 1990、問 15**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/90-s2-q15

## 鍵となる考え方

$O$ を中心とし、すべての弾痕を囲む最小の円の半径は、**最も遠い**弾痕までの距離に等しい。したがって $Y$ は独立な距離の最大値である。最大値が $y$ 以下となるのは、**すべての**弾痕が $y$ 以内にあるときであり、またそのときに限る。これにより累積分布関数（cumulative distribution function）は積で表される。最も遠い弾痕を除外した後に求める半径は、**2 番目に**大きい距離である。その分布関数は、与えられた円の外側にいくつの弾痕があってよいかを数えることで得られる。




## 解答

$R_1, \ldots, R_n$ を $n$ 個の弾痕の $O$ からの距離とする。これらは独立（independent）であり（各弾は独立に撃たれる）、それぞれの分布関数は

$$P(R_i \le t) = t^2, \qquad 0 \le t \le 1.$$

である。

### $Y$ の分布

すべての弾痕を含む $O$ 中心の最小の円の半径は $Y = \max(R_1, \ldots, R_n)$ である。$0 \le y \le 1$ に対して

$$P(Y \le y) = P(R_1 \le y, \ldots, R_n \le y) = \prod_{i=1}^{n} P(R_i \le y) = (y^2)^n = y^{2n},$$

となる。ここで 2 番目の等号で独立性を用いた。これを微分すると、$Y$ の確率密度関数（probability density function）は

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} y^{2n} = 2ny^{2n-1}, \qquad 0 \le y \le 1,$$

となり、求める結果が得られる。（$[0,1]$ の外では 0 であり、積分すると当然 1 になる。）

円の面積は $\pi Y^2$ であるから

$$E(\pi Y^2) = \pi \int_0^1 y^2 \cdot 2ny^{2n-1}\,\mathrm{d}y = 2n\pi \int_0^1 y^{2n+1}\,\mathrm{d}y = \frac{2n\pi}{2n+2} = \frac{n\pi}{n+1}.$$

である。

### 最も遠い弾痕を除外する

弾痕が残るように $n \ge 2$ とする。最も遠い弾痕を取り除くと、残りを囲む $O$ 中心の最小の円の半径は Z、すなわち $R_1, \ldots, R_n$ のうち 2 番目に大きいものとなる。

> **考えてみよう** 事象 $Z \le z$ を、半径 $z$ の円の外側に落ちる弾痕の個数を用いてどのように表せるだろうか？

2 番目に大きい距離が $z$ 以下となるのは、$O$ から $z$ より遠くにある弾痕が**高々 1 個**であるときであり、またそのときに限る。各弾痕は独立に確率 $z^2$ で $z$ 以内にあるので、半径 $z$ の円の外側にある弾痕の個数は二項分布（binomial distribution）$\mathrm{B}(n, 1-z^2)$ に従う。したがって $0 \le z \le 1$ に対して

$$\begin{aligned} P(Z \le z) &= P(\text{外側に弾痕がない}) + P(\text{外側にちょうど 1 個の弾痕がある}) \\ &= z^{2n} + n(1-z^2)z^{2(n-1)} \\ &= nz^{2n-2} - (n-1)z^{2n}. \end{aligned}$$

となる。微分すると Z の密度関数が得られる：

$$f_Z(z) = 2n(n-1)z^{2n-3} - 2n(n-1)z^{2n-1} = 2n(n-1)z^{2n-3}(1-z^2), \qquad 0 \le z \le 1.$$

よって新しい円の面積の期待値は

$$\begin{aligned} E(\pi Z^2) &= 2n(n-1)\pi \int_0^1 \left(z^{2n-1} - z^{2n+1}\right) \mathrm{d}z \\ &= 2n(n-1)\pi \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right) \\ &= 2n(n-1)\pi \cdot \frac{2}{2n(2n+2)} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)\pi, \end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。

## 検算

- $n = 1$ のとき、最初の答えは $\pi/2$ である。弾痕が 1 個のとき $R^2$ は $[0,1]$ 上の一様分布に従う（$P(R^2 \le u) = u$ であるから）ので、面積 $\pi R^2$ の期待値は $\pi/2$ となる。
- $n = 2$ のとき、2 番目の答えは $\pi/3$ であり、これは 2 個の弾痕のうち**近いほう**に対する面積の期待値である。最初の答え $2\pi/3$ と合わせると、両者の平均は 1 個の場合の値 $\pi/2$ となり、確かにそうなるべきである。
- $n = 5$、試行回数 $2 \times 10^5$ のシミュレーションでは、面積の期待値として 2.618 と 2.095 が得られた。理論値は $5\pi/6 \approx 2.618$ と $4\pi/6 \approx 2.094$ である。

## よくある間違い

- 残りの弾痕を $n-1$ 個の新たな標本であるかのように扱い、$P(Z \le z) = z^{2(n-1)}$ と書いてしまう。除外される弾痕は無作為ではないので、残った弾痕は $O$ の側に偏っている。
- どの弾痕が円の外側にあるかを表す因子 $n$ を忘れる。
- $E(Y)$ を求めてからそれを 2 乗してしまう。面積の期待値は $\pi E(Y^2)$ であり、$\pi\big(E(Y)\big)^2$ ではない。

## STEP のその先へ

これらは**順序統計量**（order statistics）である。$U_i = R_i^2$ は $[0,1]$ 上の一様分布に従うので、面積は単に $n$ 個の一様乱数の順序統計量であり、$n$ 個の独立な一様乱数のうち $k$ 番目に小さいものは平均 $k/(n+1)$ のベータ分布（beta distribution）に従う。ここでの 2 つの答えは $k = n$ と $k = n-1$ の場合である。$n$ 個の無作為な点が $[0,1]$ を、長さの期待値が等しい $n+1$ 個の区間に分ける、というのが見通しのよい描像である。

Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門書）では、この種の変換や順序統計量が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。