解答例

STEP II 1990、第 14 問

力学 ・ 弾性衝突

> **STEP II 1990、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q14

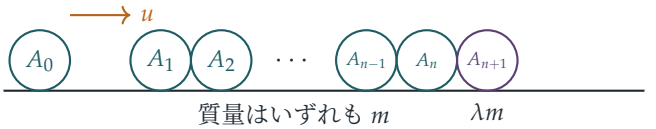
この問題は、*Beyond STEP* の第 10.1 節「ニュートンのゆりかご」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch10/newtons-cradle.html

鍵となる考え方

力積（impulse）が列に沿ってどのように伝わるのかがわからない以上、衝突を一つずつ追っていくことはできない。できるのは、考えられる最終的な運動それぞれを次の三つの条件に照らして確かめることである。すなわち、運動量（momentum）が保存されること、運動エネルギー（kinetic energy）が保存されること、そしてビー玉同士が互いをすり抜けないことである。三つ目の条件は忘れやすいが、各小問の結論を決めるのはまさにこの条件である。すぐ後ろに静止したビー玉があるビー玉は後ろ向きに動くことができず、また、ビー玉がすぐ前にあるビー玉より速く動いていることはありえない。

解答

ビー玉を滑らかな直線（溝）上の質点（particle）とみなし、速度は A_0 のもとの運動の向きを正として測る。衝突前の運動量の総和は mu、運動エネルギーの総和は $\frac{1}{2}mu^2$ であり、どちらも保存される。



ビー玉は重なり合うことができないので、起こりうるどんな最終的な運動についても、次の二つの事実が成り立つ。

- A_k が静止していて、A_{k+1} がそのすぐ前で接しているならば、A_{k+1} の速度は負にはなりえない。
- A_k と A_{k+1} が接しているならば、A_k の速度は A_{k+1} の速度を超えることはない。

小問 (i)

A_n と A_{n+1} だけが動き、その速度がそれぞれ v、w であるとする。両辺を m で割ると、

$$v + \lambda w = u,$$
$$v^2 + \lambda w^2 = u^2.$$

$v = u - \lambda w$ をエネルギーの式に代入すると、

$$u^2 - 2\lambda uw + \lambda^2 w^2 + \lambda w^2 = u^2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda w\big((1+\lambda)w - 2u\big) = 0.$$

解 $w = 0$ からは $v = u$ が得られる。このとき A_n は静止している A_{n+1} に向かって前進することになり、これは不可能である。もう一つの解は

$$w = \frac{2u}{1+\lambda}, \qquad v = u - \lambda w = \frac{(1-\lambda)u}{1+\lambda}.$$

$\lambda < 1$ の場合：このとき $v > 0$ なので、A_n は静止している A_{n-1} から離れていく。また

$$w - v = \frac{(1+\lambda)u}{1+\lambda} = u > 0,$$

なので、A_{n+1} は A_n から離れていく。二つの保存則がともに成り立ち、重なり合うものもないので、この運動は起こりうる。このとき $A_0, \ldots, A_{n-1}$ はすべて静止している。

$\lambda > 1$ の場合：このとき $v < 0$ なので、A_n は後ろ向きに動かなければならない。しかし、そのすぐ後ろには A_{n-1} が接して静止している。したがって、二つの保存則をともに満たす唯一の運動は物理的に不可能であり、$\lambda > 1$ のときこの種の運動は存在しない。

小問 (ii)

A_{n-1}、A_n、A_{n+1} だけが動き、その速度がそれぞれ a、b、c であるとする。$n \geq 3$ なので、ビー玉 A_{n-2} が存在し、それは静止していて A_{n-1} に後ろから接している。よって $a \geq 0$ である。動いている三つのビー玉は互いを追い越せないので、$a \leq b \leq c$ である。したがって a、b、c はすべて非負である。

考えてみよう 二つの保存則からは、いずれも a、b、c に関する方程式が得られる。方程式を解かずに、これらをどのように比較すればよいだろうか？

運動量の式を 2 乗し、エネルギーの式を引く。保存則より $a+b+\lambda c = u$ かつ $a^2+b^2+\lambda c^2 = u^2$ なので、

$$(a+b+\lambda c)^2 - (a^2+b^2+\lambda c^2) = u^2 - u^2 = 0.$$

左辺を展開すると、

$$\lambda(\lambda-1)c^2 + 2ab + 2\lambda c(a+b) = 0.$$

$\lambda > 1$ かつ $a,b,c \geq 0$ のとき、左辺の各項はすべて非負なので、各項はすべて 0 でなければならない。特に $\lambda(\lambda-1)c^2 = 0$ であり、これより $c = 0$ となる。すると $0 \leq a \leq b \leq c = 0$ となり、三つのビー玉はすべて静止していることになる。$u > 0$ なので、これは運動量の式に矛盾する。したがって、$\lambda > 1$ のときこのような運動は存在しない。

小問 (iii)

(ii) の議論は、動いているビー玉がどのような組であっても通用する。すなわち、すべての速度が非負で A_{n+1} が動くならば、運動エネルギーが小さすぎるのである。したがって $\lambda > 1$ のときは、いずれかのビー玉が後ろ向きに動かなければならない。A_0 以外のビー玉にはすべてすぐ後ろに別のビー玉があるので、跳ね返るビー玉の候補として自然なのは A_0 である。

考えてみよう どの二つのビー玉で試せばよいだろうか？

A_0 と A_{n+1} が速度 p、q で動き、$A_1,\ldots,A_n$ は静止したままである場合を試す。これは v,w を p,q に置き換えただけで (i) と同じ二つの方程式であり、自明でない解は

$$p = \frac{(1-\lambda)u}{1+\lambda} = -\frac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}, \qquad q = \frac{2u}{1+\lambda}.$$

(i) と同様に、運動量とエネルギーは保存されている。さらに、この運動は物理的にも起こりうる。

- $p < 0$ なので、A_0 は後ろ向きに動いて A_1 から離れていき、A_0 の後ろには何もない。
- $q > 0$ なので、A_{n+1} は静止している A_n から離れていく。

したがって、起こりうる運動の一つは、A_0 が速さ $\dfrac{(\lambda-1)u}{\lambda+1}$ で跳ね返り、A_{n+1} が速さ $\dfrac{2u}{\lambda+1}$ で動き出し、$A_1,\ldots,A_n$ が静止したままであるというものである。

これは、衝突を隣り合うビー玉同士の個別の衝突の連続としてモデル化した場合に起こることとも一致する。質量の等しいビー玉の組はそれぞれ速度を交換するので、速さ u は A_n まで受け渡されていく。A_n が A_{n+1} に衝突すると、A_n は速度 p で跳ね返り、その後ろ向きの速度が今度は列に沿って A_0 まで受け渡されていく。

検算

- $\lambda = 1$ のときはすべてのビー玉が同一であり、どちらの答えも、A_{n+1} が速さ u で動き出し、それ以外はすべて静止するというものになる。これはおなじみの「ニュートンのゆりかご（Newton's cradle）」である。
- $\lambda = 2$、$u = 3$ のとき、小問 (iii) から $p = -1$、$q = 2$ が得られる。運動量：$-1 + 2 \times 2 = 3$。エネルギー：$1 + 2 \times 4 = 9 = 3^2$。
- $n = 3$ と $n = 6$ について、2 個ずつの弾性衝突（elastic collision）の連続を数値的に追った。$\lambda = 2$ のとき最終的な速度は $-\frac{1}{3}u$ と $\frac{2}{3}u$、$\lambda = 4$ のときは $-0.6u$ と $0.4u$ となり、予測どおりであった。$\lambda = \frac{1}{2}$ のときは、シミュレーションは A_n と A_{n+1} がそれぞれ $\frac{1}{3}u$ と $\frac{4}{3}u$ で動く状態で終わり、(i) と一致する。

よくある間違い

- 二つの保存則の方程式を解いただけで終わりにしてしまうこと。各小問の結論は、その解が物理的に起こりうるかどうか、すなわち速度の符号や、ビー玉同士がすり抜けることにならないかどうかにかかっている。
- (i) で解 $w = 0$、$v = u$ を残してしまうこと。この解は衝突前の運動を表しているにすぎない。
- (ii) において、A_{n-1} の後ろに静止した A_{n-2} があることを保証しているのが $n \geq 3$ であることを忘れること。

STEP のその先へ

接して並んだビー玉の列では、二つの保存則（conservation law）だけでは結果は決まらない。この問題の本質は、保存量の条件を満たす多くの解のうち、どれが物理的に起こりうるかということにある。それらの中から選ぶには、接触についてのより詳しいモデル、たとえば 2 個ずつの衝突の連続や、ビー玉を硬いばねとして扱うモデルが必要になる。ビー玉をばねとしてモデル化すると、粒子の鎖を伝わる波の理論につながる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このよう

な考え方で衝突と保存則を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。