解答例

STEP II 1990、第 13 問

力学 ・ 棒のつり合い

> **STEP II 1990、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q13

鍵となる考え方

釘はなめらかで糸は軽いので、張力（tension）は糸のどこでも等しい。したがって棒は PO に沿った引く力と QO に沿った引く力という、大きさの**等しい**二つの力を受ける。これらの合力（resultant）は角 POQ を二等分し、釣り合い（equilibrium）のためには同じ鉛直線上で重力と打ち消し合わなければならない。よって O を通る鉛直線は角 POQ の二等分線（angle bisector）であり、しかも G を通る。あとは角の二等分線定理が片をつけてくれる。そして求める不等式は、三角形 OPQ がつぶれていない本物の三角形であるという主張にすぎない。

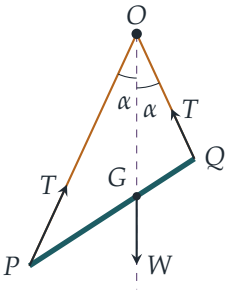
解答

OP と OQ を求める

棒を剛体の棒とみなし、その重心（centre of gravity）を G とする。ここで $PG = a + d$, $GQ = a - d$ であり、$0 \leq d < a$ とする。これにより G は棒の上にあり、中点に対して Q の側（または中点そのもの）にある。糸は軽く伸び縮みせず、釘は小さくなめらかなので、張力 T は二つの部分 OP と OQ で等しく、

$$OP + OQ = 2b.$$

である。棒にはたらく力は三つだけである。G にはたらく重力 W、P で PO の向きにはたらく張力 T、Q で QO の向きにはたらく張力 T である。



二つの張力の作用線は O で交わるので、(O のまわりのモーメント（moment）を考えると）重力も O を通って作用しなければならない。すなわち、O を通る鉛直線は G を通る。さらに、二つの張力は大きさが等しいので、その合力は PO 方向の単位ベクトルと QO 方向の単位ベクトルの和の向きを向く。これは両者のなす角の二等分線の向きである。この合力は W と釣り合うために鉛直でなければならない。したがって鉛直線 OG は角 POQ を二等分する。その半分の角をそれぞれ α とおく。

考えてみよう OG が角 POQ を二等分することがわかると、長さについて何がいえるだろうか。

三角形 OPQ における角の二等分線定理（angle bisector theorem）により、O からの二等分線は PQ を隣り合う二辺の比に分ける：

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{PG}{GQ} = \frac{a+d}{a-d}.$$

（直接確かめるには次のようにすればよい。三角形 OPG と OQG は O からの高さが共通なので、面積の比は $PG : GQ$ である。一方、それぞれの面積は $\frac{1}{2}\,OP \cdot OG \sin\alpha$ と $\frac{1}{2}\,OQ \cdot OG \sin\alpha$ でもある。）よってある $k > 0$ を用いて $OP = k(a+d), OQ = k(a-d)$ と書け、$OP + OQ = 2b$ から $2ka = 2b$、すなわち $k = b/a$ を得る：

$$OP = \frac{b(a+d)}{a}, \qquad OQ = \frac{b(a-d)}{a}.$$

不等式

$\theta = \angle POQ = 2\alpha$ とおく。棒は鉛直ではないので、O は直線 PQ 上にない。よって OPQ は本物の三角形であり、$0 < \theta < \pi$ である。$PQ = 2a$ として余弦定理（cosine rule）を用いると

$$\begin{aligned} 4a^2 &= OP^2 + OQ^2 - 2\,OP \cdot OQ \cos\theta \\ &= \frac{b^2}{a^2}\Big[(a+d)^2 + (a-d)^2 - 2(a^2-d^2)\cos\theta\Big] \\ &= \frac{2b^2}{a^2}\Big[(a^2+d^2) - (a^2-d^2)\cos\theta\Big]. \end{aligned}$$

となる。ここで $\theta \neq 0$ より $\cos\theta < 1$ であり、$d < a$ より $a^2 - d^2 > 0$ である。したがって

$$4a^2 > \frac{2b^2}{a^2}\left[(a^2 + d^2) - (a^2 - d^2)\right] = \frac{4b^2d^2}{a^2},$$

すなわち $b^2d^2 < a^4$ である。($b > 0, d \geq 0$ であるから) 正の平方根をとると $bd < a^2$ となり、

$$d < \frac{a^2}{b},$$

が示された。

これは三角不等式(triangle inequality)$OP - OQ < PQ$ と同値である。実際、$OP - OQ = 2bd/a$ であり、$2bd/a < 2a$ は同じ条件である。(もう一方の不等式 $\cos\theta > -1$ からは $OP + OQ > PQ$、すなわち $b > a$ が得られる。これは糸がそもそも釘にかけられるだけの長さをもつということにすぎない。)

検算

- $d = 0$ (一様な棒) ならば $OP = OQ = b$ となり、対称性から当然のとおり棒は水平につり下がる。不等式 $0 < a^2/b$ は自動的に成り立つ。
- $d \to a^2/b$ とすると $OP - OQ \to 2a = PQ$ となり、三角形はつぶれて棒は鉛直になる。この値を超えると、つり下がる方法は鉛直につり下がる以外にない。
- $a = 1, b = 2, d = 0.3$ とすると $OP = 2.6, OQ = 1.4, \cos\theta \approx 0.648$ である。OG が鉛直になるようにこの三角形を置くと、二つの張力の水平成分は打ち消し合い、O のまわりのモーメントも計算機の精度の範囲で釣り合う。糸のあらゆる位置を走査したところ、これが鉛直でない唯一の釣り合いの位置であり、$d \geq a^2/b$ となるとそのような位置は存在しないことが確かめられた。

よくある間違い

- 糸の二つの部分で張力が異なると考えてしまう。なめらかな釘にかけた糸では張力は等しく、まさにそのことが OG を角の二等分線にしている。
- 角の二等分線による比を逆にしてしまう。長いほうの糸 OP は、G から遠いほうの端につながる。
- この釣り合いが安定であると思い込む。実際には不安定 (unstable) である。$d = 0$ のとき、水平な棒では G は O より $\sqrt{b^2 - a^2}$ だけ下にあるが、鉛直につり下がると O より b だけ下になり、こちらのほうが低い。問題が問うているのは釣り合いだけである。

STEP のその先へ

棒に対する O の軌跡（locus）は P と Q を焦点（foci）とする楕円（ellipse）であり、釣り合いの位置は G の高さが停留（stationary）する点である。これが仮想仕事の原理（principle of virtual work）であり、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）へとつながっていく。この見方は、等しい張力がなぜ角を二等分するのかも説明してくれる。それは楕円の反射性質（reflection property）にほかならない。静力学（statics）と安定性（stability）について次に学ぶには、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）がよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。