解答例

STEP II 1990、第 12 問

力学 ・ 反発係数と放物運動

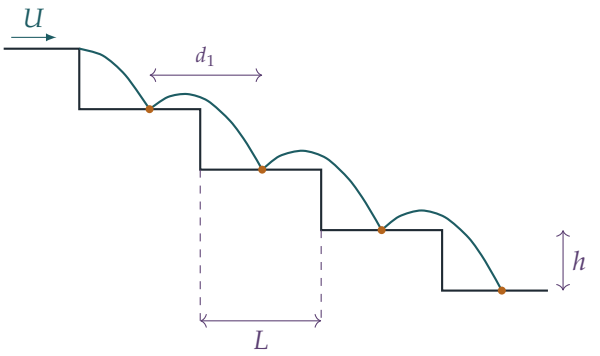
> **STEP II 1990、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q12

鍵となる考え方

階段は滑らか（smooth）なので、水平方向の速度は決して変化しない。速度は終始 U のままであり、どの水平距離も単に U に飛行時間を掛けたものになる。仕事はすべて鉛直方向の運動にある。そこでは、跳ね返るたびに鉛直方向の速さが e 倍になり、h だけ落下するたびにその 2 乗に $2gh$ が加わる。これにより、各跳ね返りにおける鉛直方向の速さの 2 乗について、簡単な漸化式（recurrence）が得られる。最後の小問では、跳ね返りがどこに着地しなければならないかを考えるとよい。限りなく続く階段の上で、一段につき一回である。

解答

粒子は、跳ね返りと跳ね返りの間では重力のみを受けて運動する点としてモデル化する。また階段は滑らかな水平面とし、各段は一つ上の段より高さ h だけ低く、各段の縁は水平距離 L ずつ離れているものとする。



跳ね返りの間の距離

水平方向の運動。階段は滑らかなので、階段から受ける力積（impulse）はすべて鉛直方向であり、跳ね返りの間にはたらく力は重力のみである。したがって水平方向の速度は常に U であり、時間 T の飛行で進む水平距離は UT である。

鉛直方向の運動。n 回目の跳ね返りで粒子が段に衝突するときの（下向きの）速さを w_n とする。粒子は鉛直方向の速度 0 で最上段を離れ、h だけ落下するので、

$$w_1^2 = 2gh.$$

である。n 回目の跳ね返りでは、固定された段に対するニュートンの反発の法則（Newton's law of restitution）により、粒子は速さ ew_n で上向きに跳ね返る。その後、粒子は h だけ低い次の段に到達しなければならないので、$v^2 = u^2 + 2as$ より（下向きを正とすると変位は $+h$ である）

$$w_{n+1}^2 = e^2 w_n^2 + 2gh.$$

が成り立つ。$w_1^2 = 2gh$ から始めてこれを繰り返し用いると、

$$\begin{aligned} w_n^2 &= 2gh\left(1 + e^2 + e^4 + \cdots + e^{2(n-1)}\right) \\ &= 2gh\,\frac{1 - e^{2n}}{1 - e^2} = 2gh\,\alpha_n^2, \end{aligned}$$

となる。ここで等比級数（geometric series）の和を求めた（$e^2 \neq 1$ なのでこれは正当である）。よって、すべての $n \geq 1$ に対して $w_n = \sqrt{2gh}\,\alpha_n$ である。これを厳密にするには簡単な数学的帰納法（induction）で十分である。実際、$e^2 \cdot 2gh\,\alpha_n^2 + 2gh = 2gh\left(e^2\alpha_n^2 + 1\right)$ かつ $e^2\alpha_n^2 + 1 = \dfrac{e^2 - e^{2n+2} + 1 - e^2}{1 - e^2} = \alpha_{n+1}^2$ である。

> **考えてみよう** n 回目の跳ね返りから $(n+1)$ 回目までの飛行時間はどれだけか。

鉛直方向の速度は一定の割合 g（下向き）で変化する。上向きの ew_n から始まり下向きの w_{n+1} で終わるので、全体で $ew_n + w_{n+1}$ だけ変化する。したがって飛行時間は

$$T_n = \frac{ew_n + w_{n+1}}{g} = \frac{\sqrt{2gh}}{g}\left(e\alpha_n + \alpha_{n+1}\right) = \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(e\alpha_n + \alpha_{n+1}\right).$$

である（最終的な速さがすでに分かっているので、T_n についての 2 次方程式を解かずに済む）。水平方向の速さ U を掛けると、

$$d_n = U\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(e\alpha_n + \alpha_{n+1}\right),$$

となり、求める結果が得られる。

非常に長い階段

$0 \le e < 1$ なので $e^{2n} \to 0$ であり、$n \to \infty$ のとき $\alpha_n \to \dfrac{1}{\sqrt{1-e^2}}$ となる。したがって、$1-e^2 = (1-e)(1+e)$ を用いると

$$d_n \to D = U\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1+e}{\sqrt{1-e^2}} = U\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}},$$

である。

? **考えてみよう** なぜこの極限の距離はちょうど L でなければならないのか。

最上段の縁から水平方向に x を測る。すぐ下の段は $0 \le x \le L$ を占め、一般に最上段から n 段下の段は $(n-1)L \le x \le nL$ を占める。粒子はどの段でもちょうど一回跳ね返るので、n 回目の跳ね返りの位置を x_n とすると

$$(n-1)L \le x_n \le nL, \qquad \text{よって} \qquad \frac{x_n}{n} \to L \text{ ただし} n \to \infty.$$

が成り立つ。一方、$x_n = x_1 + d_1 + d_2 + \cdots + d_{n-1}$ であり、$d_k \to D$ である。もし $D > L$ ならば、ある番号以降のすべての d_k は L を一定量以上上回るので、粒子は跳ね返るたびに段の縁に対して一定の距離ずつ先行し、やがてある段を飛び越えてしまう。もし $D < L$ ならば、粒子は着実に遅れていき、やがて同じ段に二回着地してしまう（厳密には、D に収束する項の平均 x_n/n は D に収束する）。いずれにせよ、十分に長い階段では一段につき一回の跳ね返りとはならない。したがって、非常に大きな N に対しては $D = L$ でなければならない：

$$U\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}} = L \quad \Longrightarrow \quad U = \left(\frac{L^2 g}{2h}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2}},$$

となり、求める結果が得られる。

検算

- **特別な値。** $\alpha_1 = 1$ なので $d_1 = U\sqrt{2h/g}\,(e + \sqrt{1+e^2})$ である。$e = 0$ のとき、粒子は跳ね返るたびに鉛直方向に完全に停止するので、各飛行は $\sqrt{2h/g}$ の時間をかけて単に h だけ落下するものとなる。実際 $d_n = U\sqrt{2h/g}$ であり、最後の条件は $U\sqrt{2h/g} = L$ となって、まさにそうあるべき形になる。
- **次元。** $\sqrt{2h/g}$ は時間なので d_n は長さであり、$\sqrt{L^2 g/h}$ は速さである。
- **数値計算。** U、h、e の値をランダムに選び（$g = 9.8$ として）運動を数値的に追跡したところ、各 d_n が 10^{-6} 以内の誤差で再現された。$e = \frac{1}{2}$、$L = 0.3$、$h = 0.2$ のとき公式から $U \approx 0.857$ が得られ、このとき跳ね返りの位置は 2000 段にわたって連続する段の上にとどまった。

よくある間違い

- すべての跳ね返りを、静止状態から、あるいは前回の跳ね返りの高さからの h の落下とみなしてしまう。粒子は跳ね返るたびに上昇するので、鉛直方向の速さは段を経るごとに増大していく。
- $w_{n+1} = ew_n + \sqrt{2gh}$ と書いてしまう。足し合わされるのは速さの **2 乗**であり、速さそのものではない。

STEP のその先へ

最後の小問は平均についての主張である。$d_n \to D$ ならば、累積平均についても $\frac{1}{n}\sum d_k \to D$ が成り立つ（チェザロ（Cesàro）の定理）。これは実解析（real analysis）の初期に扱われる標準的な演習問題である。また、U についての条件は**必要条件**（necessary）であって十分条件ではないことにも注意しよう。初期の跳ね返りは L より短く、e が 1 に近い場合には、累積した不足分が初めの先行分 x_1 を上回ることがあり、そのときはどの打ち出しの速さでもうまくいかない。数列の極限を丁寧に扱ったものとしては Abbott, *Understanding Analysis* を、衝突の力学については Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics* を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。