解答例

STEP II 1990、第 11 問

力学 ・ 角運動量保存則

> **STEP II 1990、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q11

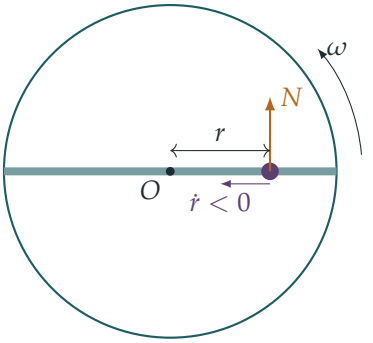
鍵となる考え方

円板と粒子をひとまとまりの系とみると、鉛直な回転軸のまわりの外力のトルク（torque）はなく、仕事をする外力もない。したがって、軸のまわりの角運動量（angular momentum）と運動エネルギー（kinetic energy）という 2 つの量が保存される。この 2 つの式から ω と $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ が直ちに求まる。一方の変化率を他方で割ると時間が消去され、経路、すなわち θ の関数としての r についての変数分離形（separable）の微分方程式が残る。

解答

モデル

粒子をなめらかな溝の中にある質点（point mass）とみなし、軸もなめらか（摩擦のない軸受け）であると仮定する。上から見ると、溝に沿って距離 r の位置にある粒子は、溝に沿った方向に速度 $\dot{r}$、溝に垂直な方向に速度 $r\omega$ をもつ。ここで $\omega = \dot{\theta}$ である。



粒子にはたらく水平方向の力は、溝からの抗力（reaction）N だけであり、これは溝に垂直である（溝はなめらかなので、溝に沿った成分はない）。円板は $-N$ を受ける。

角運動量

重力と鉛直方向の抗力は軸に平行であり、なめらかな軸はトルクを及ぼさないので、軸のまわりの全角運動量は一定である。円板の寄与は $mk^2\omega$、粒子の寄与は $m\,r\cdot r\omega = mr^2\omega$ である。$t=0$ のときと比較すると

$$mk^2\omega + mr^2\omega = mk^2\Omega + ma^2\Omega \quad\Longrightarrow\quad \omega = \frac{\Omega(k^2+a^2)}{k^2+r^2}.$$

エネルギー

> **考えてみよう** 抗力 N は、粒子が横向きに動いている間、粒子を横向きに押している。それでは運動エネルギーが変わってしまうのではないか？

粒子の運動エネルギーは変わるが、全体の運動エネルギーは変わらない。N は粒子に対して仕事率 $N\cdot r\omega$ で仕事をする。一方、円板にはたらく大きさが等しく向きが逆の力は同じ距離 r の位置に作用するので、トルク $-Nr$ を及ぼし、仕事率 $-Nr\omega$ で仕事をする。これらは打ち消し合うので、全運動エネルギーは保存される：

$$\tfrac{1}{2}mk^2\omega^2 + \tfrac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\omega^2) = \tfrac{1}{2}mk^2\Omega^2 + \tfrac{1}{2}m(V^2 + a^2\Omega^2).$$

よって

$$\dot r^2 = V^2 + (k^2+a^2)\Omega^2 - (k^2+r^2)\omega^2.$$

与えられた条件 $V^2 = \Omega^2a^2(k^2+a^2)/k^2$ を用いると

$$V^2 + (k^2+a^2)\Omega^2 = \Omega^2(k^2+a^2)\,\frac{a^2+k^2}{k^2} = \frac{\Omega^2(k^2+a^2)^2}{k^2},$$

であり、角運動量の結果から $(k^2+r^2)\omega^2 = \Omega^2(k^2+a^2)^2/(k^2+r^2)$ である。したがって

$$\dot r^2 = \Omega^2(k^2+a^2)^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2+r^2}\right) = \frac{\Omega^2(k^2+a^2)^2\,r^2}{k^2(k^2+r^2)}.$$

粒子が軸に向かって動いている間は $\dot r < 0$ なので、負の平方根をとる（$r>0$ とする）：

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{\Omega r(k^2+a^2)}{k(k^2+r^2)^{1/2}},$$

となり、示すべき式が得られた。

経路

$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t > 0$ なので、連鎖律（chain rule）より

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t} = -\frac{\Omega r(k^2+a^2)}{k(k^2+r^2)^{1/2}} \cdot \frac{k^2+r^2}{\Omega(k^2+a^2)} = -\frac{r(k^2+r^2)^{1/2}}{k},$$

すなわち $k\,\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = -r(k^2+r^2)^{1/2}$ である。Ω と a が消えていることに注意しよう。

ここで $u = 1/r$ とおくと、$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = -u^{-2}\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}\theta$ であり、$r(k^2+r^2)^{1/2} = u^{-2}(1+k^2u^2)^{1/2}$ である（$u > 0$ だから）。方程式は

$$k\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = \sqrt{1+k^2u^2}.$$

となる。平方根の形から、双曲線関数による置換（hyperbolic substitution）が思い浮かぶ。$ku = \sinh\phi$ とおく。すると $k\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}\theta = \cosh\phi\,\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}\theta$ かつ $\sqrt{1+\sinh^2\phi} = \cosh\phi$ なので

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \phi = \theta + \alpha.$$

$\theta = 0$ のとき $r = a$ なので、$\sinh\alpha = ku = k/a$ である。よって $k/r = \sinh(\theta+\alpha)$、すなわち

$$r\sinh(\theta+\alpha) = k, \qquad \sinh\alpha = \frac{k}{a}.$$

粒子は決して軸に到達しない

> **考えてみよう** $r = k/\sinh(\theta+\alpha)$ は $\theta \to \infty$ のとき 0 に近づく。円板が有限の時間で無限の角度だけ回転することはありうるだろうか？

ありえない。$r^2 \geq 0$ なので $\omega = \Omega(k^2+a^2)/(k^2+r^2) \leq \Omega(k^2+a^2)/k^2$ であり、時刻 t までに円板が回転する角度は高々 $\theta \leq \Omega(k^2+a^2)t/k^2$ で、これは有限である。有限の θ に対して $\sinh(\theta+\alpha)$ は有限なので、$r = k/\sinh(\theta+\alpha) > 0$ である。また、すべての $r > 0$ に対して $\dot{r}$ は厳密に負なので、粒子が止まって引き返すことはない。したがって、これらの式はすべての t で成り立ち、r は 0 に向かって減少し続けるが、決して 0 には到達しない。

（別解として、$\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ の式から直接示すこともできる。a から r まで進むのにかかる時間は $\frac{k}{\Omega(k^2+a^2)}\int_r^a \frac{\sqrt{k^2+x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$ であり、$x = 0$ の近くで被積分関数は k/x のようにふるまうので、その積分は $r \to 0$ のとき対数的に発散する。）

検算

- $t = 0$ では $r = a$ より $\omega = \Omega$ かつ $\dot{r} = -\Omega a\sqrt{k^2+a^2}/k = -V$ となり、初期条件と一致する。また $\theta = 0$ では $r = k/\sinh\alpha = a$ となる。

- θ が大きいとき $r \approx 2ke^{-(\theta+\alpha)}$ である。粒子は指数関数的に渦を巻きながら近づいていき、決して到達しないことと整合する。
- 数値的に、ランダムな k, a, Ω に対して運動方程式（角運動量を固定した $\ddot{r} = r\omega^2$）を逐次計算すると、$\dot{r}$、エネルギー、および $r\sinh(\theta+\alpha) = k$ が約 10^{-12} の精度で再現された。$k = a = \Omega = 1$ のとき、$r = 10^{-8}$ に達するまでの時間は約 9.32 であり、$\frac{1}{2}\ln(1/r)$ のように増加する。

よくある間違い

- 粒子のエネルギーだけが保存されると仮定してしまう。溝からの抗力は粒子に仕事をするので、保存されるのは全体のエネルギーだけである。
- 粒子の運動エネルギーや角運動量において、横方向の速度 $r\omega$ を忘れてしまう。
- θ が有限の時間で有限にとどまることを確かめずに、有限の θ に対して $r > 0$ であることだけから、粒子は決して軸に到達しないと結論してしまう。

STEP のその先へ

V に課された特別な条件は、粒子を $r = 0$ に向かっていつまでもじわじわと近づいていく軌道にちょうど乗せるものである。回転座標系（rotating frame）では $r = 0$ は不安定な平衡点（unstable equilibrium）であり、この軌道はその**安定多様体**（stable manifold）である。V がわずかでも大きければ粒子は中心を通り過ぎ、わずかでも小さければ引き返す。このような考え方は、連結された物体に対する保存則とともに、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）に登場する。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。