解答例

STEP II 1990、第 10 問

純粋数学 • 行列の多項式方程式

> **STEP II 1990、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q10

鍵となる考え方

行列式（determinant）は行列の積を普通の数の積に変える。そして実数の積がゼロになるのは、因数のどれかがゼロであるときに限られる。3 次式については、$\mathbf{M}$ は $\mathbf{I}$ と可換（commute）であるから、$\mathbf{M}$ の行列多項式は x の多項式とまったく同じように因数分解（factorise）できる。さらに上三角行列（upper triangular matrix）は非常に扱いやすい。積の対角成分は対角成分どうしの積にすぎないので、対角部分はすぐに処理でき、本当に手間がかかるのは右上の成分だけである。

解答

$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ を満たす行列

積の行列式は行列式の積であるから、

$$\det \mathbf{A} \, \det \mathbf{B} = \det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{0} = 0.$$

左辺は 2 つの実数の積であるから、少なくとも一方はゼロである。すなわち $\det \mathbf{A} = 0$ または $\det \mathbf{B} = 0$、あるいはその両方が成り立つ。これが示すべき結果である。

$\det \mathbf{B} \neq 0$ ならば $\mathbf{B}^{-1}$ が存在し、$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ の右から $\mathbf{B}^{-1}$ を掛けると

$$\mathbf{A} = \mathbf{ABB}^{-1} = \mathbf{0}\,\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{0}.$$

したがって $\mathbf{A}$ は零行列（zero matrix）でなければならない。

しかし、両方の行列式がゼロであるだけでは十分ではない。たとえば

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

とすると、$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} = 0$ であるが、$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ である。

3 次式の因数分解

まず多項式 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ を因数分解する。6 の小さな約数を試すと

$$\begin{aligned} f(-1) &= -1 + 2 + 5 - 6 = 0, \\ f(2) &= 8 + 8 - 10 - 6 = 0, \\ f(-3) &= -27 + 18 + 15 - 6 = 0, \end{aligned}$$

であり、最高次の係数が 1 であるから $f(x) = (x+1)(x-2)(x+3)$ となる。

次に $(\mathbf{M} + p\mathbf{I})(\mathbf{M} + q\mathbf{I})(\mathbf{M} + r\mathbf{I})$ を展開する。$\mathbf{I}$ は $\mathbf{M}$ と可換であり（さらに $\mathbf{I}^2 = \mathbf{I}$ であり）、展開は数の場合とまったく同じになる：

$$\mathbf{M}^3 + (p+q+r)\mathbf{M}^2 + (pq + qr + rp)\mathbf{M} + pqr\,\mathbf{I}.$$

上の多項式と係数を比べると、

$$p = 1, \qquad q = -2, \qquad r = 3$$

（順序は任意）ととればよく、このときすべての正方行列 $\mathbf{M}$ に対して $\mathbf{M}^3 + 2\mathbf{M}^2 - 5\mathbf{M} - 6\mathbf{I} = (\mathbf{M} + \mathbf{I})(\mathbf{M} - 2\mathbf{I})(\mathbf{M} + 3\mathbf{I})$ が成り立つ。

> ? **考えてみよう** これで、3 つの因数のうちどれかが零行列でなければならないと言えるだろうか？

言えない。前半で見たように、行列の積はどの因数もゼロでないのにゼロになりうる。わかるのは、少なくとも 1 つの因数が特異（singular）であるということだけである。したがって、実際に計算しなければならない。

上三角行列の解

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ とおく。各因数は上三角行列で、右上の成分はどれも同じ c である：

$$\mathbf{M} + k\mathbf{I} = \begin{pmatrix} a+k & c \\ 0 & b+k \end{pmatrix}.$$

対角成分が (d_i, e_i) で右上の成分がすべて c に等しい 3 つの上三角行列について、積を計算すると

$$\begin{pmatrix} d_1 & c \\ 0 & e_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_2 & c \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_3 & c \\ 0 & e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1d_2d_3 & c\,(d_1d_2 + d_1e_3 + e_2e_3) \\ 0 & e_1e_2e_3 \end{pmatrix}.$$

となる。$d_1, d_2, d_3 = a+1, a-2, a+3$ および $e_1, e_2, e_3 = b+1, b-2, b+3$ とすると、方程式は次の 3 つの条件になる：

$$\begin{aligned} (a+1)(a-2)(a+3) &= 0, \\ (b+1)(b-2)(b+3) &= 0, \\ c\,[(a+1)(a-2) + (a+1)(b+3) + (b-2)(b+3)] &= 0. \end{aligned}$$

はじめの 2 つは $a, b \in \{-1, 2, -3\}$ を意味する。3 つ目の括弧の中を展開すると

$$(a^2 - a - 2) + (ab + 3a + b + 3) + (b^2 + b - 6) = a^2 + ab + b^2 + 2(a+b) - 5.$$

考えてみよう 9 通りの組をすべて試すよりも、この括弧がゼロになる場合を見抜くうまい方法はないだろうか？

ある。$a \neq b$ ならば、括弧の中は

$$\frac{a^3 - b^3}{a-b} + 2\,\frac{a^2 - b^2}{a-b} - 5\,\frac{a-b}{a-b} = \frac{f(a) - f(b)}{a-b},$$

であり、$f(a) = f(b) = 0$ であるからこれは 0 である。よって $a \neq b$ のとき、3 つ目の条件は c が何であっても成り立つ。

$a = b$ ならば、括弧の中は $3a^2 + 4a - 5 = f'(a)$ である。これは $a = -1, 2, -3$ のときそれぞれ $-6, 15, 10$ であり（f は相異なる 3 つの根をもつので、どれもゼロではない）、3 つ目の条件から $c = 0$ が導かれる。

したがって、解は次のとおりである：

- $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ で、a と b は $\{-1, 2, -3\}$ の中の**異なる**数、c は**任意の**実数であるもの（6 つの族）；
- 3 つのスカラー行列（scalar matrix）$-\mathbf{I}, 2\mathbf{I}, -3\mathbf{I}$（$a = b$ の場合で、このとき $c = 0$ となる）。

検算

$a=-1$, $b=2$, $c=5$ とする。このとき $\mathbf{M}+\mathbf{I}=\begin{pmatrix}0&5\\0&3\end{pmatrix}$, $\mathbf{M}-2\mathbf{I}=\begin{pmatrix}-3&5\\0&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{M}+3\mathbf{I}=\begin{pmatrix}2&5\\0&5\end{pmatrix}$ である。はじめの 2 つの積がすでに $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ であるから、どんな c に対しても全体の積はゼロになる。一方、$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$ とすると $\mathbf{M}^3+2\mathbf{M}^2-5\mathbf{M}-6\mathbf{I}=\begin{pmatrix}0&15\\0&0\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}$ となり、$f'(2)=15$ と一致する。多数の有理数 a,b,c についてコンピュータで探索したところ、ちょうど上の解だけが見つかった。また、因数分解はランダムな 3×3 整数行列で確かめた。

よくある間違い

- $(\mathbf{M}+\mathbf{I})(\mathbf{M}-2\mathbf{I})(\mathbf{M}+3\mathbf{I})=\mathbf{0}$ から、$\mathbf{M}$ は $-\mathbf{I}$, $2\mathbf{I}$, $-3\mathbf{I}$ のいずれかでなければならないと結論してしまう。前半の問いは、まさにこの誤りを戒めるためにある。
- $a=b$ の場合を忘れる、あるいはその場合にも c が任意であると思い込む。
- 前半の例として、うっかり $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$ となるものを書いてしまう。積が本当にゼロでないことを確かめること。

STEP のその先へ

この答えは**最小多項式**（minimal polynomial）への入り口である。行列が相異なる根をもつ多項式を満たすのは、その行列が対角化可能（diagonalisable）で、固有値（eigenvalue）がそれらの根の中にあるときであり、かつそのときに限る。$a\neq b$ の解はどの c に対しても対角化可能であるが、$c\neq0$ のときの $\begin{pmatrix}a&c\\0&a\end{pmatrix}$ は対角化可能でなく、だからこそ解にならないのである。右上の成分に現れる差分商（divided difference）$\big(f(a)-f(b)\big)/(a-b)$ が $a=b$ のとき $f'(a)$ になることは、一般に行列の関数を定義する方法そのものである。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、固有値と対角化をわかりやすく解説している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。