解答例

STEP II 1990、第 1 問

純粋数学 ・ 多項式の不等式

> **STEP II 1990、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s2-q1

鍵となる考え方

実数解をもたない 4 次式とは、要するに常に正の値をとる 4 次式のことである。そこで、それを非負であることがわかっている部分、すなわち完全平方式や、特定の区間で符号が明らかな積に分解する方法を探す。どこでも通用する分け方は 1 つもないが、区間ごとに異なる分け方が使え、それらを合わせれば実数全体を覆うことができる。最初の問いでは部品が与えられているが、最後の問いでは自分で見つけなければならない。

解答

2 つの非負の式

4 次式を因数分解（factorising）し、2 次式を平方完成（completing the square）すると、

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2\left(x^2 - 2x + 1\right) = x^2(x-1)^2,$$
$$x^2 - 8x + 17 = (x-4)^2 + 1.$$

1 つ目は 2 つの平方の積であるから、すべての実数 x に対して ≥ 0 である。2 つ目は平方に 1 を加えたものであるから 1 以上であり、特に非負である。

1 つ目の方程式

$p(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 17$ とおく。p は上の 2 つの式の和ではないことに注意する（その和には x^2 ではなく $2x^2$ が現れる）。したがって単純に足し合わせることはできない。代わりに、区間ごとに p を異なる形に分け、全域で $p(x) > 0$ であることを示

す。

> **考えてみよう** 問題では 2 つの非負の式が与えられているが、それらを足しても $p(x)$ にはならない。それでもどうすればこれらを利用できるだろうか？

それぞれの式は、数直線の一部で「借りる」ことができる。ある区間では 4 次式 $x^2(x-1)^2$ を残し、余った $17-8x$ を直接扱う。別の区間では 2 次式 $(x-4)^2+1$ を残し、余った x^4-2x^3 を直接扱う。

$x \le 0$ の場合. このとき $x^4 \ge 0$、$-2x^3 \ge 0$（$x^3 \le 0$ より）、$x^2 \ge 0$、$-8x \ge 0$ である。よって $p(x)$ の各項はすべて非負であり、定数項 17 により全体は 17 以上となる。ゆえに $p(x) > 0$ である。

$0 < x \le 2$ の場合. 次のように書く。

$$p(x) = x^2(x-1)^2 + (17-8x).$$

第 1 項は ≥ 0 であり、$x \le 2$ より $17-8x \ge 17-16 = 1$ である。よって $p(x) \ge 1 > 0$ である。

$x > 2$ の場合. 次のように書く。

$$p(x) = x^3(x-2) + \left(x^2-8x+17\right) = x^3(x-2) + (x-4)^2 + 1.$$

$x > 2$ より x^3 と $x-2$ はともに正であるから $x^3(x-2) > 0$ であり、また $(x-4)^2+1 \ge 1$ である。よって $p(x) > 1 > 0$ である。

3 つの区間はすべての実数を覆い、それぞれで $p(x) > 0$ であるから、$p(x) = 0$ は実数解（real roots）をもたない。

2 つ目の方程式

$q(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 4$ とおく。同じ方法をまねるが、今度は分け方を自分で選ぶ。

> **考えてみよう** 数直線をどこで分け、どの項どうしを組にすればよいだろうか？

各組が、それぞれの区間で明らかな符号をもつようにしたい。組 $4-4x = 4(1-x)$ は $x \le 1$ で非負である。$x \ge 1$ では、組 $x^4 - x^3 = x^3(x-1)$ が非負であり、残りの $x^2-4x+4 = (x-2)^2$ は完全平方式である。したがって自然な境界は $x = 1$ である。

$x \leq 1$ の場合. 次のように書く。

$$q(x) = \left(x^4 - x^3 + x^2\right) + 4(1-x) = x^2\left[\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}\right] + 4(1-x).$$

第 1 項は ≥ 0 であり、0 となるのは $x = 0$ のときに限る（角括弧の中は $\frac{3}{4}$ 以上である）。第 2 項は $x \leq 1$ より ≥ 0 であり、0 となるのは $x = 1$ のときに限る。2 つの項が同時に 0 になることはないから、$q(x) > 0$ である。

$x \geq 1$ の場合. 次のように書く。

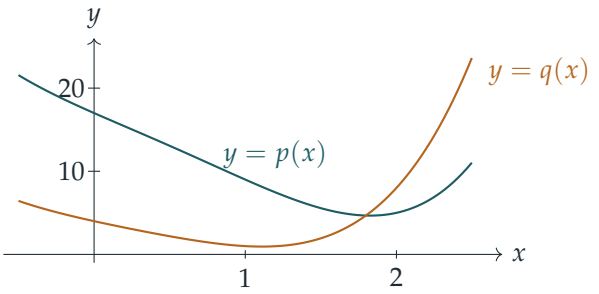
$$q(x) = x^3(x-1) + \left(x^2 - 4x + 4\right) = x^3(x-1) + (x-2)^2.$$

$x \geq 1$ では x^3 と $x - 1$ はともに非負であるから第 1 項は ≥ 0 であり、0 となるのは $x = 1$ のときに限る。第 2 項は平方であり、0 となるのは $x = 2$ のときに限る。やはり両者が同時に 0 になることはないので、$q(x) > 0$ である。

よって、すべての実数 x に対して $q(x) > 0$ であり、$q(x) = 0$ は実数解をもたない。

検算

- 各分解を展開し、本当に p または q に戻ることを確かめる。たとえば $x^3(x-1) + (x-2)^2 = x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 4$ である。
- $-5 \leq x \leq 8$ を刻み幅 10^{-4} で数値的に調べると、p の最小値は約 4.67（$x \approx 1.83$ 付近）、q の最小値は約 0.94（$x \approx 1.11$ 付近）となる。図からもわかるとおり、どちらも十分に正である。



よくある間違い

- 与えられた 2 つの式を足して、その和が $p(x)$ であると主張すること。x^2 の項が一致しないので、そうはならない。

- 「非負の項と非負の項の和」から $q(x) > 0$ と結論すること。それでは $q(x) \geq 0$ しか得られない。解の存在を否定するには、2 つの項が同時に 0 にならないことを示さなければならない。
- $-2x^3$ や $-8x$ の符号が常に負だと思い込むこと。$x \leq 0$ では、これらは邪魔になるどころか助けになる。

STEP のその先へ

多項式を平方和（sum of squares）として表すことでその正値性を示すことは、本格的な研究テーマである。1 変数の非負多項式はすべて、2 つの実多項式の平方の和として表せる。しかしヒルベルト（Hilbert）は、多変数ではこれが成り立たないことを示し、これが彼の第 17 問題へとつながった。今日では、最適化問題においてコンピュータがこのような分解を探索している。この種の不等式の技法をさらに多く知りたければ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（上級数学問題集）が次の一歩としてよいだろう。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。