解答例

STEP I 1990、第 9 問

純粋数学 ・ 接線と面積の評価

> **STEP I 1990、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/90-s1-q9

鍵となる考え方

曲線 $y = 1/x$ は上に向かって曲がっている（凸（convex）である）ので、どの接線（tangent）も曲線の下側にある。したがって、接線の下にある二つの台形（trapezium）は、$x = 1$ から $x = b$ までの曲線の下の領域に収まり、その領域の面積は $\ln b$ である。二つの面積を比べると、対数（logarithm）に対する下からの評価（lower bound）が得られる。同じように、曲線の上側にある長方形を用いると上からの評価（upper bound）が得られる。

解答

点 C

$y = 1/x$ に対して $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -1/x^2$ である。よって、$(t, 1/t)$ における接線は

$$y - \frac{1}{t} = -\frac{1}{t^2}(x - t), \qquad \text{すなわち} \qquad y = \frac{2}{t} - \frac{x}{t^2}.$$

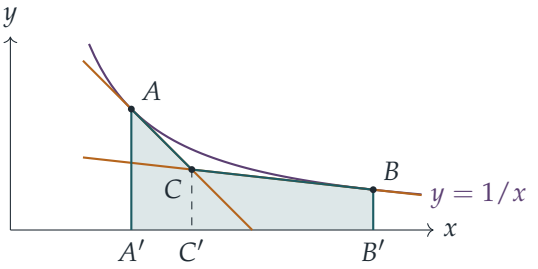
である。$t = 1$ とすると、A における接線は $y = 2 - x$ である。$t = b$ とすると、B における接線は $y = \frac{2}{b} - \frac{x}{b^2}$ である。両者の交点では

$$2 - x = \frac{2}{b} - \frac{x}{b^2} \quad \Longrightarrow \quad x\left(1 - \frac{1}{b^2}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{b}\right).$$

が成り立つ。$b > 1$ であるから $1 - \frac{1}{b} \neq 0$ で割ることができ、$x\left(1 + \frac{1}{b}\right) = 2$ が残る。したがって

$$C = \left(\frac{2b}{b+1}, \frac{2}{b+1}\right),$$

である。ここで y 座標は $y = 2 - x$ から求めた。$1 < \frac{2b}{b+1} < b$ であることに注意しよう。左側の不等式は $b+1 < 2b$ と同値であり、右側の不等式は $2 < b+1$ と同値である。$b > 1$ であるからどちらも成り立ち、C は横方向に A と B の間にある。



図は $b = 3$ の場合である。網かけの領域は二つの四角形（quadrilateral）からなる。

面積の和

どちらの四角形も鉛直な辺を二つもつので台形であり、その面積は幅に二つの鉛直な辺の長さの平均を掛けたものである。

$ACC'A'$ について、幅は $\frac{2b}{b+1} - 1 = \frac{b-1}{b+1}$ であり、鉛直な辺の長さは 1 と $\frac{2}{b+1}$ である。よって

$$\text{面積}(ACC'A') = \frac{1}{2} \cdot \frac{b-1}{b+1}\left(1 + \frac{2}{b+1}\right) = \frac{(b-1)(b+3)}{2(b+1)^2}.$$

$CBB'C'$ について、幅は $b - \frac{2b}{b+1} = \frac{b(b-1)}{b+1}$ であり、鉛直な辺の長さは $\frac{2}{b+1}$ と $\frac{1}{b}$ である。よって

$$\text{面積}(CBB'C') = \frac{1}{2} \cdot \frac{b(b-1)}{b+1}\left(\frac{2}{b+1} + \frac{1}{b}\right) = \frac{(b-1)(3b+1)}{2(b+1)^2}.$$

これらを加えると、分子はまとめて $(b-1)(4b+4) = 4(b-1)(b+1)$ となるので

$$\text{面積}(ACC'A') + \text{面積}(CBB'C') = \frac{2(b-1)}{b+1}.$$

不等式

考えてみよう 二つの台形が曲線の下に収まらなければならないのはなぜか。

$x > 0$ のとき、曲線と $(t, 1/t)$ における接線との差は

$$\frac{1}{x} - \left(\frac{2}{t} - \frac{x}{t^2}\right) = \frac{t^2 - 2tx + x^2}{t^2 x} = \frac{(x-t)^2}{t^2 x} \geq 0.$$

である。よって、すべての $x > 0$ に対して、各接線は曲線上またはその下側にある。網かけの領域の上端は、$[1, \frac{2b}{b+1}]$ 上では A における接線、$[\frac{2b}{b+1}, b]$ 上では B における接線

である。どちらの部分も $y = 1/x$ の下側にあり、領域は x 軸の上側にある。したがって、網かけの領域は $x = 1$ から $x = b$ までの曲線の下の領域に含まれ、

$$\frac{2(b-1)}{b+1} \leq \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln b.$$

が成り立つ。

上からの評価については、$x \geq 1$ のとき $\frac{1}{x} \leq 1$ であるから、曲線の下の領域は底辺 $A'B'$、高さ 1 の長方形の内部にある。したがって

$$\ln b = \int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \int_1^b 1\,\mathrm{d}x = b - 1.$$

ここで $z > 0$ とし、$b = 1 + z$ とおくと、要求どおり $b > 1$ となる。このとき $b - 1 = z$、$b + 1 = 2 + z$ であり、二つの不等式を合わせると

$$\frac{2z}{2+z} \leq \ln(1+z) \leq z,$$

となる。これが証明すべきことであった。（実は $z > 0$ のとき二つの不等式はどちらも等号が成り立たない。曲線と評価に用いた直線は孤立した点でしか交わらないからである。）

検算

- $b = 1$ とすると、C は $(1,1) = A$ となり、面積の和は 0 となる。当然そうなるべきである。
- $b = 2$ のとき、$C = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$ であり、面積の和は $\frac{2}{3} \approx 0.667$ である。これは $\ln 2 \approx 0.693$ をわずかに下回り、さらにそれは 1 を下回る。
- z が小さいとき、$\frac{2z}{2+z} = z - \frac{z^2}{2} + \cdots$ は $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \cdots$ と z^2 の項まで一致するので、下からの評価は 0 の近くで非常に精密である。

いくつかの b の値について座標と二つの台形の面積を厳密な計算で確かめ、また 10^{-6} から 10^6 までの 10^5 個の無作為な z について不等式を確かめた。

よくある間違い

- C が $x = 1$ と $x = b$ の間にあることの確認を忘れる。これがないと、「四角形」が思っているとおりの形になるとは限らない。
- 接線が曲線の下にあることを「図から」と述べてしまう。$(x-t)^2$ を用いた一行の計算があってこそ証明になる。

STEP のその先へ

関数をそのグラフの上下にある単純な図形と比べるという考え方は、リーマン（Riemann）和（Riemann sum）の背後にある考え方であり、解析学の最初の講義で積分を厳密に定義する方法でもある。凸関数の接線がそのグラフの下にあるという事実は、凸関数の理論の出発点である。それはイェンセン（Jensen）の不等式や、相加相乗平均の不等式（AM–GM）をはじめとする多くの古典的な不等式へとつながる。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）は、まさにこの精神で積分を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。